Tiedemann
Zur theorie der elimination

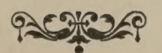
Zur Theorie der Elimination.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der hohen Philosophischen Fakultät der Königlichen Albertus-Universität zu Königsberg i. Pr.

vorgelegt von

Kurt Tiedemann
aus Königsberg.



KÖNIGSBERG i. PR.
Buch- und Steindruckerei von Otto Kümmel
1912.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen
Philosophischen Fakultät der Königl. Albertus-Universität
zu Königsberg i. Pr.

Referent: Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Fr. Meyer.

Meinen lieben Tanten
gewidmet.

Inhaltsangabe.

Kurze historische Einleitung und kurzer Überblick über die Erörterungen, welche in dieser Arbeit durchgeführt werden.

§ 1. Die Hauptresultate der Merten'schen Arbeit (Wien. Ber. 108. Abt. 2a p. 1173 u. 1344. [1899]). „Zur Theorie der Elimination“ mit besonderer Berücksichtigung des Beweises von dem Hauptsatze über die Eigenschaften der Resultante von n allgemeinen Formen in n Unbekannten von verschiedenem Grade.

§ 2. Beweis des Satzes, daß die Resultante von n allgemeinen Formen gleichen Grades m als Anfangsglied die Determinante, deren Elemente die Coefficienten der reinen Potenzglieder sind, in der m^{n-1}ten Potenz besitzt.

Führung des Beweises dieses Satzes durch den Schluß von $n-1$ auf n: Seine Richtigkeit für $n = 2$. Die Endform (Eliminante), welche sich durch Elimination von $n-2$ der Veränderlichen bei $n-1$ Formen mit n Veränderlichen ergibt. Der erste und letzte Coefficient dieser Endformen als Resultanten der $n-1$ Formen, die durch Nullsetzen einer der beiden nicht eliminierten Veränderlichen aus den ursprünglichen Formen sich ergeben. Zuendeführung des Beweises mit Hilfe zweier solcher Endformen.

§ 3. Beweis des Satzes, daß sich die Resultante aus Producten von dem Gesamtgrade m^{n-1} der Determinanten nter Ordnung zusammensetzt. welche sich der Matrix der n Formen entnehmen lassen.

§ 4. Nachweis, daß sich die Resultante dreier Kegelschnitte nicht in eine der Bézout'schen Resultantendeterminante analog gebildeten Determinante, also nicht in eine solche vierter Ordnung bringen läßt. Die mit der Determinante des Anfangsgliedes multiplizierte Resultante dreier Kegelschnitte als Determinante fünfter Ordnung. Die Arbeit von *Fr. W. Meyer:* „Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildungen“ (Math. Ver. 16. 1907). Verwendung eines Resultates derselben, um obigen Nachweis auf andere, kürzere Weise zu erbringen.

§ 5. Besprechung der Arbeit von *W. Haskell.* (Math. Ver. 12. [1903]) „Darstellung gewisser Resultanten in Determinantenform." Die von *W. Haskell* hierbei angewandte Methode und ihre Resultate. Versuch der Varallgemeinerung dieser Methode. Die Resultante von sechs quadratischen Gleichungen in sechs Veränderlichen. Das Versagen der Methode für weitere Fälle.

§ 6. Besprechung der Arbeit von *L. Dixon* (Lond. M. S. Proc. 1909 Ser. 2) „Die Elimination von drei Gleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen." Die von *L. Dixon* erfundene Methode zur Resultantenbildung für das ternäre Gebiet. Nachweis, daß diese Methode sich nicht verallgemeinern läßt. Angabe einer anderen Methode, welche zu demselben Ziele wie die von *Dixon* stammende führt. Schlußbetrachtung.

Verzeichnis

der hauptsächlichsten Abkürzungen.

J. Crelle. Crelle'sches Journal.

J. de Math. Journal de mathématiques pures et appliquées. (Paris.)

J. f. Math. Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle. (s. o.)

Lond. M. S. Pros. Proceedings of the London Mathematical Society.

Math. Ann. Mathematische Annalen, begründet 1868 durch A. Clebsch. (Leipzig.)

Math. Ver. Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. (Leipzig.)

Wien. Ber. Sitzungsberichte der Wiener Akademie.

Zur Theorie der Elimination.

Die Geschichte der Resultante umfaßt bereits einen Zeitraum von zweihundert Jahren. Denn schon *Leibnitz* und *Euler* haben sich mit der Bildung der Resultante zweier Gleichungen in einer Unbekannten beschäftigt und auch bereits einige ihrer Eigenschaften abgeleitet. Obwohl in der Folgezeit Abhandlungen von den bedeutendsten Mathematikern wie von *Cramer, Jacobi* (J. Crelle, Bd. 22) und *Hesse* (J. Crelle Bd. 28) hierüber erschienen und besonders von Jacobi eine ganze Reihe schöner Sätze bezüglich der Resultante gefunden wurden, so ist doch erst von *Schläfli* in der Wienerdenkschrift vom Jahre 1852 (Abt. 2 p. 1) eine umfassende Darstellung der Theorie der Resultanten gegeben worden. In dieser Arbeit finden sich auch einige ganz neue Sätze über das Wesen der Resultante bewiesen und sind zuerst gewisse partielle Differentialgleichungen aufgestellt worden, denen die Resultanten genügen. Dieser umfangreichen Abhandlung von *Schläfli* folgten ungefähr dreißig Jahre später die Abhandlungen von *Kronecker* [Festschrift f. Math. 92,1 (1882)] und die beiden Aufsätze von *F. Mertens*: „Zur Theorie der Elimination." [Wien, Ber. 93, Abt. 2 p. 527 (1886) und 108, Abt. 2a p. 1173 u. 1344 (1899).] In diesen beiden letzterwähnten Abhandlungen, von denen jedoch nur die zweite berücksichtigt zu werden

braucht, da sie denselben Gegenstand, aber in einfacherer und zugleich erweiterter Darstellung wie die erste bringt, wird vor allem ein Existenzbeweis geliefert und gezeigt, daß bei ein und demselben Formensystem nur eine Funktion der Coefficienten desselben existiert, welche die Resultante rein d. h. ohne jeden Factor darstellt.

Alle diese Arbeiten, wie auch noch später erschienene z. B. die von: *K. Th. Vahlen* (J. f. Math. 113 p. 348), *Macaulay* (Lond, M. S. Proc. 35,3 [1903]), *Julius König* (Einleitung in die Theorie der algebraischen Größen, Leipzig [1903]), gewähren einen mehr theoretischen Genuß, da die direkte Berechnung nach den dort etwa in Frage kommenden Methoden sehr umständlich, ja unmöglich wäre. Überhaupt finden sich verhältnismäßig selten in der Literatur Arbeiten, in denen der Versuch gemacht ist, allgemeine Methoden zur direkten Berechnung von Resultanten zu bestimmen. Daß nun nach dieser Richtung hin so wenig getan ist, rührt gewiß, wie auch schon *Schläfli* in seiner bereits erwähnten Arbeit bemerkt, einmal von dem geringen Interesse her, welches dieser Gegenstand besitzt; denn sobald die Anzahl und der Grad der Gleichungen auch nur die Zahl zwei überschreitet, besteht die Resultante aus einer solchen unübersehbaren Anzahl von Gliedern, daß die nummerische Behandlung ganz unpraktisch wird. Dann aber scheint auch die Lösung der Aufgabe, eine allgemeine Methode anzugeben, vermittelst deren wenigstens die Möglichkeit gegeben wäre, die Resultante wie im Falle für zwei Gleichungen in einer Veränderlichen hinzu-

schreiben, äußerst schwierig zu sein. So ist denn auch bis auf den heutigen Tag diese Frage bei weitem noch nicht gelöst, da die einzige von *Caylay* herrührende Methode, die auf Allgemeinheit Anspruch erheben dürfte, ganz davon abgesehen, daß sie doch nicht einmal theoretisch durchführbar sein würde, für höhere Formen keine brauchbaren Resultate liefern möchte, worauf bereits *Schläfli* aufmerksam gemacht hat.

Während sich neue richtige Eigenschaften der Resultante kaum noch aufstellen lassen werden, gibt es hier doch noch eine Lücke auszufüllen. Denn wie gering auch das praktische Interesse für die Lösung dieser Aufgabe sein möge, man wird doch stets das Empfinden von etwas Unvollkommenem, noch nicht völlig Abgeschlossenem haben, bevor man nicht auch dieses Problem gelöst hat. So sind denn auch gerade in neuester Zeit Abhandlungen erschienen, welche sich hiermit beschäftigen und in denen sich, wenn gleich bei weitem noch keine vollständige Beantwortung dieser Frage gegeben ist, neue bemerkenswerte Resultate vorfinden. *P. Gordan* hat z. B. [J. de. Math. 5, p. 195 (1897), Züricher Kongreß p. 143 (1898), Math. Ann. 50, p. 113 (1899)] die Resultanten der ternären Formen invariantiv behandelt d. h. durch Überschiebungen ausgedrückt. Sodann sind noch die Arbeiten von *W. Haskell* [Math. Ver. 12 (1903)], von *Fr. W. Meyer* (Math. Ver. 16, 1907) und von A. L. Dixon (Lond. M. S. Proc. 1909 Sez. 2) hervorzuheben.

Ich habe mich eingehender mit den bisherigen Methoden zur Bildung von Resultanten beschäftigt

Hierbei fiel mir zunächst auf, daß, sobald die vorliegenden Formen von gleichem Grade waren, sich die Resultante stets als ein Aggregat aus Producten von Determinanten, welche sich der Matrix der Formen entnehmen lassen, darstellte und daß in diesem Aggregat die Determinante, deren Elemente nur aus den Coefficienten der reinen Potenzglieder jener Formen bestanden, in dem Grade, welcher den Coefficienten einer jeden Form in der Resultante zukam, mit dem Coefficienten 1 auftrat. Da ich einen diesbezüglichen Satz nirgends bewiesen gefunden habe, noch sich ein solcher ohne weiteres aus den bisher bekannten Eigenschaften der Resultante folgen zu lassen schien, so habe ich im Folgenden gezeigt, daß die Resultante von Formen gleichen Grades stets jene oben erwähnten Eigenschaften besitzt. Bei diesem Beweise habe ich mich auf den in der Mertens'schen Arbeit sich findenden Satz gestützt, daß ein Ausdruck, welcher nur die Coefficienten eines Formensystems enthält und sonst noch gewisse Eigenschaften besitzt, — hierauf wird später näher eingegangen — stets durch die Resultante jenes Systems teilbar ist. Daher sah ich mich auch veranlaßt, bei meinen folgenden Ausführungen zunächst auf die bereits erwähnte Mertens'sche Abhandlung (Wien, Ber. 108 Abt. 2a) zurückzukommen und ich habe (§ 1) ihre wichtigsten Resultate zusammengestellt, wobei noch besonders auf den Beweis des Hauptsatzes jener Abhandlung (vgl. § 1, Satz 3) näher eingegangen wurde. Denn es erschien mir zweckmäßig, die in ihm enthaltenen Hauptgedanken und die Absichten der einzelnen

Operationen deutlicher herauszuarbeiten, um so den recht komplizierten Beweis durchsichtiger zu gestalten. Hierauf habe ich (§ 2 und § 3) das Bestehen jener bereits erwähnten Eigenschaften bei Resultanten von Formen gleichen Grades nachgewiesen. Es folgt dann (§ 4) der Nachweis, daß sich die Resultanten von Formensystemen von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen nicht mehr in durchsichtige Determinantenformen, analog der Bézout'schen Resultantendeterminante des binären Gebietes gebildet, allgemein darstellen lassen; als Beispiel dient dabei die Resultante dreier Kegelschnitte. Gleichzeitig ist in diesem Teile der Arbeit auf die Abhandlung von *Fr. W. Meyer* „Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildungen" näher eingegangen worden. Im Anschluß hieran bin ich auf die Methoden zur direkten Resultantenbildung, welche in den Arbeiten von *W. Haskell* (§ 5) und *A. L. Dixon* (§ 6) gebracht werden, zurückgekommen und habe nachgewiesen, daß die Methoden beider — bei der von *W. Haskell* hergeleiteten sind mir einige Erweiterungen geglückt — sich nur auf ein verhältnismäßig beschränktes Gebiet verwenden lassen. Auch eine zum Schlusse dieser Untersuchungen von mir gebrachte Methode, mit der man ebenso wie mit der von *L. Dixon* begründeten, obschon beide recht wenig mit einander zu tun haben, fast nur das ternäre Gebiet beherrscht, hat sich als nicht verallgemeinerungsfähig erwiesen.

§ 1.

In diesem Paragraphen soll zunächst auf die Arbeit von *F. Mertens* näher eingegangen werden, zumal bei dem später zu führenden Beweise von gewissen Sätzen und Ausdrücken, welche in ihr vorkommen, Gebrauch gemacht werden soll. Auf den Beweis der Sätze wird hier nicht weiter eingegangen werden mit Ausnahme des bereits erwähnten Hauptsatzes.

Unter einer allgemeinen Form der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ werde eine ganze homogene Funktion dieser Veränderlichen mit unbestimmten Coefficienten verstanden. Eine ganze Funktion der Unbestimmten a', a'', ..., welche in der Gestalt

$$\varphi_1 \cdot \psi_1 + \varphi_2 \cdot \psi_2 + \ldots . \varphi_r \cdot \psi_r$$

erscheint, wo

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$$
$$\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_r$$

ganze Funktionen derselben Unbestimmten a', a'' ... bedeuten, werde kurz mit

$$[\psi_1, \psi_2, \ldots . \psi_r]$$

bezeichnet, wenn es auf die Kenntnis der Ausdrücke $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ nicht weiter ankommt.

Es seien $f_1, f_2 \ldots .$ allgemeine Formen von $x_1, x_2 \ldots x_n$. Der Grad von f_i soll in der Regel mit m_i, der Coefficient des reinen Potenzgliedes $x_k^{m_i}$ in f_i mit a_{ik} und der Ausdruck, in welchem $f_i - a_{ik} x_k^{m_i}$ für $x_k = 1$ übergeht, durch $f_i^{(k)}$ bezeichnet werden.

Ersetzt man in einer ganzen Funktion F der Coefficienten von $f_1, f_2 \ldots$ und der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Veränderliche x_k durch 1 und die

Unbestimmten a_1k, a_2k . . . bezw. durch $f_1^{(k)}$, $f_2^{(k)}$, . . ., so ergibt sich ein von a_1k, a_2k . . . freier Ausdruck F_o, welcher der Rest von F in Bezug auf die Formen f_1, f_2 . . . und der Veränderlichen x_k genannt werden soll.

Liegen n allgemeine Formen f_1, f_2 . . . f_n der Veränderlichen x_1, x_2 . . . x_n vor, so soll von einem Ausdruck Θ, der eine ganze Funktion der Coefficienten dieser Formen ist und der die Veränderlichen x_1 x_2 . . . x_n nicht mehr enthält, gesagt werden, daß er die Grundeigenschaft in Bezug auf f_1, f_2 . . . f_n besitzt, wenn sein Product in eine Potenz einer der Veränderlichen x_1, x_2 . . . x_n in der Gestalt

$$[f_1, f_2, \ldots f_n]$$

darstellbar ist.

1. Satz (von *Mertens*): Wenn für irgend einen Wert von i identisch

$$\Theta x_i^{\nu} = [f_1, f_2 \ldots f_n]$$

ist, so verschwindet der Rest Θ_0 von Θ in Bezug auf die Formen f_1, f_2 . . . f_n identisch und wenn umgekehrt der Rest von Θ verschwindet, so besitzt diese Funktion die Grundeigenschaft in Bezug auf f_1, f_2 . . . f_n.

Folgerungen. Wenn Θ_1 und Θ_2 die Grundeigenschaft in Bezug auf f_1, f_2 . . . f_n besitzen, so auch $\Theta_1 + \Theta_2$. Hat ferner Θ die Grundeigenschaft in Bezug auf f_1, f_2 . . . f_n und ist M eine Funktion der Coefficienten von f_1, f_2 . . . f_n, welche die Veränderlichen x_1, x_2 . . . x_n nicht enthält, so besitzt auch das Product $M . \Theta$ die Grundeigenschaft Wenn umgekehrt das Product $M \cdot \Theta$ die Grundeigenschaft besitzt, M aber nicht, so muß Θ sie besitzen.

2. Satz (von *Mertens*). Jede ganze Funktion der Coefficienten von $f_1, f_2 \dots f_n$, welche die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen besitzt und kein durch das Hauptpotenzproduct P teilbares Glied enthält, verschwindet identisch. Hierbei wird unter Hauptpotenzenproduct das Product

$$P = a_{11}^{p_1} \,.\, a_{22}^{p_2} \dots a_{nn}^{p_n}$$

verstanden und dabei ist a_{ii} der Coefficient, den in f_i das reine Potenzglied $x_i^{m_i}$ enhält, p_i gleich $\frac{p}{m_i}$, wo m_i den Grad von f_i bezeichnet und p das Product $m_1 \,.\, m_2 \dots . m_n$ bedeutet.

Da von der Führung des Beweises dieses wichtigen Satzes hier abgesehen wird, weil dieser wie auch die aller anderen hier ohne Beweis wiedergegebenen Sätze in der betreffenden Abhandlung von *Mertens* mit größter Einfachheit und Durchsichtigkeit geführt sind, so möge doch wenigstens ein Beispiel für seine Richtigkeit zeugen, zumal sich dabei ein interessantes Resultat ergibt.

Beispiel: Gegeben seien drei allgemeine ternäre quadratische Formen, d. h. also, wenn sie gleich Null gesetzt werden, die Gleichungen von drei allgemeinen Kegelschnitten. Diese seien:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0\, x_1^2 + a_1\, x_2^2 + a_2\, x_3^2 + a_3\, x_1\, x_2 + a_4\, x_1\, x_3 + a_5\, x_2\, x_3 \\ (1.)\quad f_2 &= b_0\, x_1^2 + b_1\, x_2^2 + b_2\, x_3^2 + b_3\, x_1\, x_2 + b_4\, x_1\, x_3 + b_5\, x_2\, x_3 \\ f_3 &= c_0\, x_1^2 + c_1\, x_2^2 + c_2\, x_3^2 + c_3\, x_1\, x_2 + c_4\, x_1\, x_3 + c_5\, x_2\, x_3 \end{aligned}$$

Bezeichnet d_{ikl} die dreireihige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ b_i & b_k & b_l \\ c_i & c_k & c_l \end{vmatrix}$$

so ergeben sich durch Elimination von je zwei der ersten drei Glieder der drei Gleichungen (1.) folgende drei neue

$$\begin{aligned} F_1 &= [f_1, f_2, f_3] = d_{012}\, x_3^2 + d_{013}\, x_1\, x_2 + d_{014}\, x_1\, x_3 + d_{015}\, x_2\, x_3 \\ \text{(2.)}\quad F_2 &= [f_1, f_2, f_3] = d_{012}\, x_1^2 + d_{123}\, x_1\, x_2 + d_{124}\, x_1\, x_3 + d_{125}\, x_2\, x_3 \\ F_3 &= [f_1, f_2, f_3] = d_{012}\, x_2^2 - d_{023}\, x_1\, x_2 - d_{024}\, x_1\, x_3 - d_{025}\, x_2\, x_3 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) folgt:

$$\text{(3.)}\quad \Theta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ O & O & d_{012} & d_{013} & d_{014} & d_{015} \\ O & d_{012} & O & -d_{023} & -d_{024} & -d_{025} \\ d_{012} & O & O & d_{123} & d_{124} & d_{125} \end{vmatrix} = [f_1, f_2, f_3, F_1, F_2, F_3] = [f_1, f_2, f_3]$$

Der Ausdruck Θ erreicht in dem Product $a_0 \,.\, b_1 \,.\, c_2$ wie leicht zu übersehen ist, da ja dieses Glied in d_{012} vorkommt, nur die dritte Potenz anstatt der vierten, hat also kein durch das Hauptpotenzproduct der Formen (1) teilbares Glied. Weil aber Θ die Grundeigenschaft in Bezug auf f_1 f_2 f_3 besitzt, muß dieser Ausdruck nach Satz 2) identisch verschwinden. Daß dies in der Tat der Fall ist, läßt sich folgendermaßen zeigen. Man multipliziere die ersten drei Reihen der Determinante in (3) bezw. mit c_0, a_0, b_0 und ziehe dann von der so erhaltenen ersten Zeile die mit a_0 multiplizierte ursprüngliche dritte Zeile ab, etc. Man erhält dann:

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} (c_0\, a_1), & (c_0\, a_2), & (c_0\, a_3), & (c_0\, a_4), & (c_0\, a_5) \\ (a_0\, b_1), & (a_0\, b_2), & (a_0\, b_3), & (a_0\, b_4), & (a_0\, b_5) \\ (b_0\, c_1), & (b_0\, c_2), & (b_0\, c_3), & (b_0\, c_4), & (b_0\, c_5) \\ O & d_{012} & d_{013} & d_{014} & d_{015} \\ d_{012} & O & -d_{023} & -d_{024} & -d_{025} \end{vmatrix} = [f_1\; f_2\; f_3],$$

wo im allgemeinen ein Ausdruck von der Form $(m_k\; n_l)$ gleich der zweireihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} m_k & m_l \\ n_k & n_l \end{vmatrix}$$

sein soll. Reduciert man nun die Determinante in (4) in entsprechender Weise, wie soeben auf eine Determinante vierter Ordnung und zieht in Betracht, daß die Beziehung besteht

$$(p_i\; m_k)(m_i\; n_l) - (m_i\; n_k)(p_i\; m_l) = m_i \begin{vmatrix} m_i & m_k & m_l \\ n_i & n_k & n_l \\ p_i & p_k & p_l \end{vmatrix}$$

so sieht man, daß die dann sich ergebende Determinante übereinstimmende Zeilen hat, wenn man noch die einzelnen Factoren herauszieht. Hieraus folgt dann, daß Θ identisch verschwindet.

Entwickelt man die identisch verschwindende Determinante (3) nach den Unterdeterminanten der ersten drei Zeilen, so erhält man unter Anwendung von Identitäten der Art wie

$$d_{123} \cdot d_{045} - d_{023} \cdot d_{145} + d_{013} \cdot d_{245} - d_{012} \cdot d_{345} = O:$$

$$(5.)\quad d_{012}^2 \cdot d_{345} = \begin{vmatrix} d_{013} & d_{014} & d_{015} \\ d_{123} & d_{124} & d_{125} \\ d_{203} & d_{204} & d_{205} \end{vmatrix}$$

Verwendet man statt der Gleichungen (2) diejenigen, welche aus (1) durch Elimination von je zwei

der letzten drei Glieder hervorgehen und bildet man aus diesen drei Gleichungen und den Gleichungen (1) die ebenfalls wieder identisch verschwindende Determinante 6. Ordnung, so erhält man bei ihrer Entwicklung nach den Unterdeterminanten der ersten drei Zeilen die entsprechende Identität:

(6.)
$$d_{012} \cdot d_{345}^2 = \begin{vmatrix} d_{034} & d_{045} & d_{053} \\ d_{134} & d_{145} & d_{153} \\ d_{234} & d_{245} & d_{253} \end{vmatrix}$$

Durch Multiplikation von (5) mit (6) folgt dann:

$$7.)\ (d_{012} \cdot d_{345})^3 = \begin{vmatrix} d_{013} & d_{014} & d_{015} \\ d_{023} & d_{024} & d_{025} \\ d_{123} & d_{124} & d_{125} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{034} & d_{035} & d_{045} \\ d_{134} & d_{135} & d_{145} \\ d_{234} & d_{235} & d_{245} \end{vmatrix}$$

Die in (7) auftretenden Größen d_{ikl} sind die zwanzig verschiedenen dreireihigen Determinanten, die aus der Matrix der Coefficienten von den drei allgemeinen Gleichungen von Kegelschnitte sich ausschneiden lassen, wenn diese durch die in (1) vorliegenden gleich Null gesetzten Formen gegeben sind; man erhält die beiden links stehenden Größen, indem man die Matrix der drei Gleichungen (1) in der Mitte spaltet. Werden diese beiden als die erste und letzte der dreireihigen Determinanten jener Matrix bezeichnet, so läßt sich das Ergebnis in folgendem Satze aussprechen:

„Bildet man alle von einander verschiedenen dreireihigen Determinanten der sechsreihigen Matrix dreier Kegelschnitte, so ist die dritte Potenz des Productes aus der ersten und letzten jener dreireihigen Determinanten gleich dem Producte aus

zwei dreireihigen Determinanten, deren Elemente die übrigen dreireihigen aus der Matrix der Kegelschnitte entnehmbaren Determinanten sind."

3. Satz (von *Mertens*). Es gibt immer ganze rationale Funktionen R der Coefficienten von $f_1, f_2 \dots f_n$, welche die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen besitzen, in Bezug auf die Coefficienten von f_i homogen und vom Grade $p_i = \frac{p}{m_i}$ sind und das Hauptpotenzenproduct P mit dem Coefficienten 1 enthalten oder, was dasselbe ist, für

$$f_1 = x_1^{m_1},\ f_2 = x_2^{m_2}, \dots \ f_n = x_n^{m_n}$$

den Wert 1 annehmen.

Aus den Sätzen 2) und 3) läßt sich folgern:

1. Jeder ganze Ausdruck Θ der Coefficienten von $f_1, f_2 \dots f_n$, welcher die Grundeigenschaft hinsichtlich dieser Formen besitzt, ist durch jede Funktion R algebraisch teilbar.
2. Es kann nur eine Funktion R geben, welche die im Satze 3) angegebenen Eigenschaften besitzt. Diese Funktion R wird die Resultante der Formen $f_1, f_2 \dots f_n$ in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$ genannt und soll durch das Symbol

$$R = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \dots f_n \\ x_1 & x_2 \dots x_n \end{bmatrix}$$

bezeichnet werden.
3. Die allgemeine Gestalt aller Funktionen Θ der Coefficienten von den allgemeinen Formen $f_1, f_2 \dots f_n$, welche in Bezug auf sie die Grundeigenschaft besitzen, ist:

$$\Theta = G \cdot R,$$

wo R die Resultante von $f_1, f_2 \ldots f_n$ und G eine ganze Funktion der Coefficienten von $f_1, f_2 \ldots f_n$ bezeichnet.

4. Eine ganze Funktion F der Coefficienten von $f_1, f_2 \ldots f_n$ ist durch die n^{te} Potenz der Resultante von $f_1, f_2 \ldots f_n$ teilbar, wenn

$$F, \frac{d\,F}{d\,a_{nn}}, \frac{d^2 F}{d\,a_{nn}^2}, \frac{d^3 F}{d\,a_{nn}^3} \cdots \frac{d^{n-1} F}{da_{nn}^{n-1}}$$

die Grundeigenschaft besitzen.

Nunmehr soll auf den Beweis des Satzes 3), der das Rückgrat der ganzen Abhandlung bildet, näher eingegangen werden. Der Beweis ist mittelst des Schlusses von n-1 auf n geführt und daher wird seine Gültigkeit zunächst für zwei allgemeine Formen f_1 und f_2 vom Grade m bezw. n in den beiden Veränderlichen x_1 und x_2 nachgewiesen. Die Resultante zweier solcher Formen kann man nämlich unmittelbar mit Hilfe der Theorie der symmetrischen Funktionen aufstellen und es ist leicht, dann einzusehen, daß sie die in Satz 3) behaupteten Eigenschaften besitzt.

Unter der Annahme, daß dieser Satz auch für n-1 allgemeine Formen gelte, wird dann dazu übergegangen die Resultante von n allgemeinen Formen $f_1, f_2 \ldots f_n$ für den Fall aufzustellen, wo die letzte Form f_n linear in $x_1, x_2 \ldots x_n$, nämlich von der Form:

$$f_n = u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + \ldots + u_n\, x_n = u_x$$

ist. Setzt man, unter t eine Unbestimmte verstanden:

$$u_n + t\; u_{n-1} = U$$

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + \ldots . + u_{n-2} \cdot x_{n-2} = u$$

und bildet:

$$f_i\,(U \cdot x_1, U\, x_2, .. U x_{n-2}, -t \cdot u + u_n\, x_{n-1}, -u - u_{n-1} \cdot x_{n-1}) = g_i,$$

so ergeben sich nur $n-1$ allgemeine Formen g_1, g_2 .. g_{n-1}, da f_n identisch zu Null wird. Da diese n 1 neuen Formen nur die $n-1$ Veränderlichen x_1, x_2 ... x_{n-1} enthalten, so kann nach Annahme ihre Resultante L gebildet werden und es ist:

$$L \cdot x_1^r = [g_1, g_2 \dots g_{n-1}]$$

Es muß ferner nach Annahme L homogen und vom Grade $\frac{p_{n-1}}{m_i}$ in den Coefficienten von f_i und homogen und vom Grade $p_{n-1} \cdot (n-1)$ in den u sein. Ersetzt man in den g_i die Veränderliche x_{n-1} durch $x_{n-1} - t \cdot x_n$, so geht g_i in $U^{m_i} \cdot f_i + [f_n]$ über und es wird

$$L\ x_1^r = [f_1, f_2 \dots f_n]$$

L besitzt also die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen f_1, f_2 ... f_n. Mit Hilfe des Satzes 1) und 2) gelingt es dann zu zeigen, daß

$$L = U^{p_{n-1} \cdot (n-2)} \cdot \Theta$$

ist. Dieser Ausdruck Θ ist eine ganze Funktion der Coefficienten von f_1, f_2 ... f_n, besitzt die Grundeigenschaft und ist in Bezug auf die Coefficienten von f_i für jedes i homogen und vom Grade p_i. Außerdem kann man leicht nachweisen, daß Θ das Hauptpotenzenproduct $a_{11}^{p_1} \cdot a_{22}^{p_2} \dots u_n^{p_n}$ mit dem Coefficienten 1 besitzt. Θ ist also die gesuchte Resultante der Formen f_1, f_2 ... f_n, da sie den Forderungen des Satzes 3) genügt.

Um für den allgemeinen Fall die Gültigkeit des Satzes nachzuweisen, wird folgendermaßen verfahren.

Setzt man $\frac{\delta\ \Theta}{\delta\ u_i} = \Theta_i$, so folgt, weil

$$\Theta\, x_n^r = [f_1, f_2 \ldots . f_{n-1}, u_x] = Q\, u_x + [f_1, f_2 \ldots f_{n-1}]$$

ist, wo Q eine ganze Funktion der Coefficienten von $f_1, f_2 \ldots f_{n-1}, u_x = f_n$ und der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist, durch Differentiation nach u_i

$$\Theta_i\, x_n^r = Q\, x_i + [f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n]$$

Es sei f eine allgemeine Form der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ von beliebigen m^{ten} Grade. Durch Einsetzen der Ausdrücke

$$\Theta_1\, x_n^r, \Theta_2, x_n^r \ldots . \Theta_n\, x_n^r$$

in die Form f wird man zu der Identität geführt:

$$f\,(\Theta_1, \Theta_2, \ldots . \Theta_n)\, x_n^{mr} = Q^m \cdot f + [f_1, f_2 \ldots f_n]$$
$$= [f_1, f_2, \ldots f_n, f]$$

Auf folgende Weise gelangt man nun zu einem Ausdrucke, welcher die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $f_1, f_2 \ldots f_{n-1}$ f besitzt. Es sei:

$$v_1\; x_1 + v_2\; x_2 + \ldots . + v_n\; x_n = v_x$$
$$w_1\; x_1 + w_2\; x_2 + \ldots . + w_n\; x_n = w_x$$

wo $v_1, v_2 \ldots ., w_1, w_2 \ldots$ Unbestimmte bezeichnen. Ferner werden mit g, g' die binären Formen der Veränderlichen X und Y vom Grade p_{n-1} und $m\,(p_{n-1} - 1)$ bezeichnet, welche aus Θ und f $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n)$ nach Ersetzen von $u_1, u_2 \ldots u_n$ durch

$$Xv_1 + Yw_1, Xv_2 + Yw_2, \ldots ., Xv_n + Yw_n$$

hervorgehen, und es sei

$$H = \begin{vmatrix} g, & g' \\ X & Y \end{vmatrix}$$

die Resultante dieser Formen in Bezug von X, Y.

Dann bestehen die Identitäten:

$$g \cdot x_n^r = [f_1, f_2 \ldots f_{n-1}, Xv_x + Yw_x]$$

$$g' \cdot x_n^{m \cdot r} = [f_1, f_2 \ldots f_{n-1}, f, Xv_x + Yw_x]$$

$$H \cdot Y^\varrho = [g, g']$$

Aus denselben folgt:

$$H \cdot Y^\varrho x_n^{mr} = [g \cdot x_n^{mr}, g' \cdot x_n^{mr}] = [f_1, f_2 \ldots f_{n-1}, f, Xv_x + Yw_x]$$

und die Ersetzung von X, Y durch $-w_x$, v_x ergibt

$$H \cdot v_x^\varrho \cdot x_n^{mr} = [f_1, f_2 \ldots f_{n-1}, f]$$

Dieser Identität gemäß verschwindet der Rest von H in Bezug auf $f_1, f_2 \ldots f_{n-1}$, f und x_n. Es besitzt H also die Grundeigenschaft bezüglich dieser Formen.

Wird für f eine allgemeine lineare Form

$$s_x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots s_n x_n$$

genommen, so muß H durch die Resultante Θ $(s_1, s_2, \ldots s_n)$ der Formen $f_1, f_2 \ldots f_{n-1}$, s_x algebraisch teilbar sein. Es sei:

$$H = M \cdot \Theta (s_1, s_2 \ldots s_n)$$

Durch Vergleichen der Grade der s in H und Θ ergibt sich, daß die s in M nicht mehr vorkommen können.

Der Ansdruck M verschwindet nicht identisch. Denn er verschwindet nicht für gewisse besondere Formen der f und für

$$v_1 = v_2 \ldots = v_{n-1} = O, \; v_n = 1; \quad w_n = O,$$

was leicht nachgewiesen werden kann.

Es sei nun f_n von beliebigem Grade m_n. Nimmt man $f = f_n$, so hat man in H eine ganze Funktion der Coefficienten von $f_1, f_2 \ldots f_n$, welche die Grundeigenschaft besitzt. Sie muß also die gesuchte Re-

sultante als Factor enthalten, und es gilt nur noch, H von überflüssigen Factoren zu befreien.

Die Loslösung dieser Factoren ist der komplizierteste Teil des ganzen Beweises und gelingt nur unter Benutzung verschiedener Sätze aus der Algebra, wie der Newton'schen Formel über Potenzsummen und eines Satzes über elementar-symmetrische Funktionen. Es wird so nachgewiesen, daß

$$H = M^{mn} . R$$

ist. Von dem Ausdrucke R kann man dann weiterhin beweisen, daß er die Eigenschaften, die in Satz 3) von der Resultante behauptet sind, besitzt. Hiermit ist der Satz bewiesen, da ja das Vorhandensein einer solchen Funktion R für den Fall $n = 2$ feststeht und mithin auch für $n = 3$, 4 etc. vermöge dieses Beweises sich ergibt.

Nachdem dieser Satz bewiesen ist, werden in einfacher Weise eine Reihe weiterer Sätze über Resultanten gefolgert, von denen die wichtigsten hier angegeben werden sollen.

4. Satz (von *Mertens*). Die Resultante von n Formen, welche nach ihrer Definition eine bestimmte Reihenfolge der Formen wie auch der Veränderlichen voraussetzt, ändert sich, wenn man diese Reihenfolge ändert, und zwar ist, wenn $C_{\alpha,\beta \ldots \sigma}$ die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem die Permutation $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gerade oder ungerade ist,

$$\begin{bmatrix} f_\alpha, f_\beta, \ldots, f_\sigma \\ x_\alpha', x_\beta' \ldots x_\sigma' \end{bmatrix} = C^p_{\alpha \beta \ldots \sigma} \cdot C^p_{\alpha' \beta' \ldots \sigma'} \cdot R$$

5. Satz (von *Mertens*). Ersetzt man in der Formenreihe $f_1, f_2 \dots f_n$ eine Form, etwa f_i, einmal durch φ, einmal durch ψ und zuletzt durch $\varphi \cdot \psi$, wo φ, ψ allgemeine Formen von $x_1, x_2 \dots x_n$ sind, und bezeichnet die Resultanten der drei Formenreihen mit R', R'', R, so ist

$$R = R' \cdot R''$$

Hieraus folgt z. B., das ist:

$$\begin{bmatrix} f_1^{r_1}, & f_2^{r_2}, \dots, & f_n^{r_n} \\ x_1, & x_2, \dots, & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1, & f_2, \dots f_n \\ x_1, & x_2, \dots x_n \end{bmatrix}^{r_1 \cdot r_2 \dots r_n}$$

6. Satz (von *Mertens*). Ersetzt man in der Formenreihe

$$f_1, f_2 \dots f_n$$

die Form f_i durch $f_i + [f_\alpha, f_\beta \dots f_\varepsilon]$, wo $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ die von i verschiedenen Zahlen der Reihe $1, 2 \dots n$ sind und $m_i \geqq m_\alpha, m_\beta, \dots, m_\varepsilon$ angenommen wird, so bleibt R ungeändert. Ebenso bleibt R, die Resultante der Formen $f_1, f_2 \dots f_n$ ungeändert, wenn $f_k = cg^m$ ist, wo c eine Constante und g eine allgemeine Form von $x_1, x_2 \dots x_n$ bezeichnen, wenn ferner der Grad μ von g nicht größer als der Grad m_i von f_i, φ eine allgemeine Form von $x_1, x_2 \dots x_n$ vom Grade $m_i - \mu$ ist und wenn man f_i durch $f_i + g. \varphi$ ersetzt.

7. Satz (von *Mertens*). Man mache bei den allgemeinen Formen

$$f_1, f_2 \dots f_n$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ die Substitution

$$x_1 = c_{11}\ X_1 + c_{12}\ X_2 + \ldots + c_{1n}\ X_n$$
$$x_2 = c_{21}\ X_1 + c_{22}\ X_2 + \ldots + c_{2n}\ X_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = c_{n1}\ X_1 + c_{n2}\ X_2 + \ldots + c_{nn}\ X_n$$

mit den unbestimmten Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nn}$, wodurch sie in die Formen

$$f'_1,\ f'_2, \ldots f'_n$$

der Variabeln $X_1, X_2 \ldots X_n$ übergehen mögen, deren Resultante

$$R' = \begin{bmatrix} f'_1, f'_2 \ldots f'_n \\ X_1, X_2 \ldots X_n \end{bmatrix}$$

sein soll, so ist, wenn R die Resultante der ursprünglichen Formen und C die Determinante

$$C = \Sigma \pm c_{11} \cdot c_{22} \ldots c_{nn}$$

bedeutet,

$$R' = C^p \cdot R$$

R ist also eine Invariante der Formen $f_1, f_2 \ldots f_n$.

8. Satz (von *Mertens*). Sind

$$\varphi_1,\ \varphi_2, \ldots \varphi_m$$

allgemeine Formen gleichen Grades von $x_1, x_2, \ldots x_n$, wo $m \geqq n$, und bildet man die Formen

$$g_1 = c_{11}\ \varphi_1 + c_{12} \cdot \varphi_2 + \cdots + c_{1m} \cdot \varphi_m$$
$$g_2 = c_{21}\ \varphi_1 + c_{22} \cdot \varphi_2 + \cdots + c_{2m} \cdot \varphi_m$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_n = c_{n1}\ \varphi_1 + c_{n2}\ \varphi_2 + \cdots + c_{nm}\ \varphi_m,$$

wo $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{nm}$ Unbestimmte sind, so ist die Resultante

$$R = \begin{bmatrix} g_1, & g_2 \cdots g_n \\ x_1, & x_2 \ldots x_n \end{bmatrix}$$

eine Funktion der Determinanten n^{ter} Ordnung, welche sich aus dem System der Unbestimmten

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} \ldots\ldots c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} \ldots\ldots c_{2m} \\ \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots\ldots c_{nm} \end{matrix}$$

bilden lassen.

Es folgen noch eine ganze Reihe mehr oder minder wichtiger Sätze über Resultanten, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden soll, zumal sie sich mit Hilfe dieser Sätze herleiten lassen. Es soll vielmehr nun dazu übergegangen werden, mit Hilfe der im vorhergehenden angeführten Sätze 2) und 3) nebst den sich daraus ergebenden Folgerungen folgenden Satz zu beweisen.

§ 2.

„Die Resultante der n allgemeinen Formen f_1, f_2 . . . f_n, welche in den Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ alle von gleichem Grade m sind, ist eine ganze Funktion der Coefficienten dieser Formen, welche die Grundeigenschaft besitzt, in Bezug auf die Coefficienten jeder Form homogen und vom Grade m^{n-1} ist und, wenn a_{ik} den Coefficienten von x_k^m in f_i bezeichnet, das Anfangsglied

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^{m^{n-1}}$$

enthält.“

Da auch diesmal der Schluß von n—1 auf n zum Beweise verwandt werden soll, wird zuerst die Richtigkeit des Satzes für den Fall $n = 2$ nachzuweisen sein. Es mögen also zwei allgemeine Formen f_1 und f_2 von beliebigem Grade m, homogen in den beiden Veränderlichen x_1 und x_2, vorliegen, nämlich:

$$f_1 = a_0\, x_1^m + a_1\, x_1^{m-1} \cdot x_2 + a_2\, x_1^{m-2} \cdot x_2^2 + \ldots + a_{m-1}\, x_1\, x_2^{m-1} + a_m\, x_2^m$$

$$f_2 = b_0\, x_1^m + b_1\, x_1^{m-1} \cdot x_2 + b_2\, x_1^{m-2} \cdot x_2^2 + \ldots + b_{m-1}\, x_1\, x_2^{m-1} + b_m\, x_2^m$$

Man denke sich die rechten Seiten dieser Gleichungen in zwei Teile gesondert. Von diesen enthalte der eine alle Glieder, welche links von dem Gliede mit dem Potenzproducte $x_1^{m-i-1} \cdot x_2^{i+1}$ in den obigen Formen stehen, der andere aber die übrigen Glieder. Aus dem ersten Teile läßt sich dann x_1^{m-i} und aus dem zweiten x_2^{i+1} als Factor herausziehen, so daß ist:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_0\, x_1^i + a_1\, x_1^{i-1} \cdot x_2 + \ldots + a_i\, x_2^i, & a_{i+1}\, x_1^{m-(i+1)} + \ldots + a_m\, x_2^{m-(i+1)} \\ b_0\, x_1^i + b_1\, x_1^{i-1} \cdot x_2 + \ldots + b_i\, x_2^i, & b_{i+1}\, x_1^{m-(i+1)} + \ldots + b_m\, x_2^{m-(i+1)} \end{vmatrix} = [f_1\ f_2]$$

Durch Entwicklung dieser zweireihigen Determinante erhält man eine allgemeine Form der Veränderlichen x_1, x_2 vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade, deren Coefficienten zweireihige Determinanten sind, gebildet aus den Coefficienten der ursprünglichen Formen. Diese zweireihigen

Determinanten sollen allgemein mit c_{ik} bezeichnet werden, wo

$$c_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}$$

ist.

Es ergibt sich dann aus (1):

$$(2) \quad c_{0\,i+1}\, x_1^{m-1} + c_{0\,i+2}\, x_1^{m-2} \cdot x_2 + c_{0\,i+3}\, x_1^{m-3}\, x_2^2 + \ldots$$
$$\ldots + c_{0\,m}\, x_1^i\, x_2^{m-(i+1)}$$
$$c_{1\,i+1}\, x_1^{m-2} \cdot x_2 + c_{1\,i+2}\, x_1^{m-3} \cdot x_2^2 + \ldots$$
$$\ldots + c_{1\,m-1}\, x_1^i \cdot x_2^{m-(i+1} + c_{1\,m}\, x_1^{i-1} \cdot x_2^{m-i}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ c_{i\,i+1}\, x_1^{m-(i+1)} \cdot x_2^i + \ldots\ldots + c_{i\,m}\, x_2^{m-1} = [f_1\ f_2]$$

Läßt man i alle Werte von 0 bis m—1 durchlaufen, so erhält man im ganzen m-Gleichungen, welche alle von einander verschieden sind und homogen in x_1 und x_2 vom Grade m—1. Daß nämlich zwei von ihnen nicht übereinstimmen können, geht daraus hervor, daß der Coefficient c_{0m}, welcher in jeder Gleichung vorkommen muß und zwar immer nur bei dem Gliede $x_1^i\, x_2^{m-(i+1)}$ stehen kann, in zwei verschiedenen der m-Gleichungen stets bei einem anderen Gliede vorkommt, da ja für die beiden Gleichungen der Wert von i ein anderer sein muß. Hieraus folgt dann auch, daß dieser Coefficient ein- und nur einmal vor jedes der Glieder $x_1^i \cdot x_2^{m-(i+1)}$ tritt, wenn alle m-Gleichungen gebildet werden. Zieht man nun in Betracht, daß eine in x_1 und x_2 homogene Gleichung vom (m—1)ten Grade gerade m-Glieder hat, so gelangt man in bekannter Weise, wenn man z. B. die m—1 letzten Glieder eliminiert,

zu einer mit x_1^{m-1} multiplizierten Determinante m^{ter} Ordnung der Coefficienten der Gleichungen (2). Sie kann mit Hilfe der Form (2) sofort niedergeschrieben werden, wenn man i successive alle Werte durchlaufen läßt und beachtet, daß $c_{ii} = 0$ und $c_{ik} = -c_{ki}$ ist. Man gelangt so zu der bekannten zuerst von *Bézout* aufgestellten Resultantendeterminante zweier binärer Formen gleichen Grades, die man auch kurz als Bézout'sche Determinante zu bezeichnen pflegt. Sie hat folgende durchsichtige Gestalt:

$$\Theta\, x_1^{m-1} = \begin{vmatrix} c_{01} & c_{02} & c_{03} & \cdots\cdots & c_{0m-1} & c_{0m} \\ c_{02} & c_{03}+c_{12} & c_{04}+c_{13} & \cdots\cdots & c_{0m}+c_{1m-1} & c_{1m} \\ c_{03} & c_{04}+c_{13} & c_{05}+c_{14}+c_{23} & \cdots & c_{1m}+c_{2m-1} & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{0m-1} & c_{0m}+c_{1m-1} & c_{1m}+c_{2m-1} & \cdots & c_{m-3,m}+c_{m-2,m-1} & c_{m-2m} \\ c_{0m} & c_{1m} & c_{2m} & \cdots & c_{m-2,m} & c_{m-1,m} \end{vmatrix} \cdot x_1^{m-1}$$

$$[f_1, f_2]$$

In dieser Determinante kommt die zweireihige Determinante c_{om} in jedem Element der Nebendiagonalen versehen mit dem Coefficienten 1 und auch nur bei diesen Elementen vor, so daß Θ das Glied c_{om}^m besitzt und daher nicht identisch verschwinden kann, weil dieses Glied nicht forthebbar ist. Auf dieses Glied reduziert sich aber für den Fall $n=2$ der Ausdruck A. Ferner besitzt Θ, wie aus der ganzen Bildung dieser Funktion hervorgeht, die Grundeigenschaft hinsichtlich f_1 und f_2. Das schließlich Θ auch homogen in den Coefficienten von f_1 und f_2 und vom m^{ten} Grade sowohl in dem einen wie dem anderen ist, hat man wohl kaum noch nötig zu erwähnen. Es erfüllt also

Θ die Forderungen unseres Satzes und ist die Resultante der Formen f_1 und f_2.

Es mögen nun n allgemeine Formen $f_1, f_2 \ldots f_n$ vorliegen, die alle vom gleichen beliebigen Grade m und homogen in den n Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind. Nimmt man an, daß der Satz bereits für $n-1$ solcher Formen bewiesen sei, so lassen sich gewisse Folgerungen ziehen. Denn wählt man zunächst aus den n Formen $n-1$ aus, etwa die Formen $f_1, f_2 \ldots f_{n-1}$, ersetzt dann in ihnen x_1 durch $\frac{x_1}{x_n} \cdot x_n$ und betrachtet den Quotienten $\frac{x_1}{x_n}$ als zu den Coefficienten gehörig, so erhält man $n-1$ allgemeine Formen $f_1, f_2 \ldots f_{n-1}$ der Veränderlichen $x_2, x_3 \ldots x_n$ vom m^{ten} Grade. Ihre Resultante kann nach Annahme gebildet werden. In diesen Formen ist der Coefficient von x_n^m in f_i gleich

$$c_i = a_{i1} \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^m + \alpha_i \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{m-1} + \beta_i \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{m-2} + \ldots + \sigma_i \frac{x_1}{x_n} + a_{in}$$

wo die $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \sigma_i$ die Coefficienten der Glieder mit cinem Potenzproduct von x_1 und x_n allein in der ursprünglichen Form f_i sind.

Nach unserem Satze muß dann die Resultante unserer $n-1$ Formen hinsichtlich der Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots x_n$ das Anfangsglied haben:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n-1} & c_1 \\ a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n-1} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \ldots & a_{n-2,n-1} & c_{n-2} \\ a_{n-1,2} & a_{n-2,3} & \ldots & a_{n-1,n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix}^{m^{n-2}} =$$

$$
= \left|\begin{array}{l}
a_{12}\, a_{13} \dots a_{1n-1}\, a_{11} \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^m + \alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{m-1} + \dots + \sigma_1 \cdot \frac{x_1}{x_n} + a_{1n} \\
a_{22}\, a_{23} \dots a_{2n-1}\, a_{21} \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^m + \alpha_2 \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{m-1} + \dots + \sigma_2 \cdot \frac{x_1}{x_n} + a_{2n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n-2,2}\, a_{n-2,3} \cdots a_{n-2,n-1}\, a_{n-2,1} \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^m + \alpha_{n-2} \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{m-1} + \dots + \sigma_{n-2} \frac{x_1}{x_n} + a_{n-2n} \\
a_{n-1,2}\, a_{n-1,3} \cdots a_{n-1,n-1}\, a_{n-1,1} \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^m + \alpha_{n-1} \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{m-1} + \dots + \sigma_{n-1} \frac{x_1}{x_n} + a_{n-1n}
\end{array}\right|^{m^{n-2}}
$$

Hieraus und aus dem Umstande, daß die Resultante homogen und vom Grade m^{n-2} in den Coefficienten einer jeden der $n-1$ Formen sein muß, folgt, daß die linke Seite der sich ergebenden Identität eine nicht homogene allgemeine Form der Veränderlichen $\frac{x_1}{x_n}$ vom Grade m^{n-1} ist, deren Coefficienten wieder vom Grade m^{n-2} in den Coefficienten der ursprünglichen $n-1$ Formen sind. Indem man diese Form durch Multiplikation mit $x_n^{m^{n-1}}$ homogen macht, kommt man zu folgender Identität:

$$
(4) \quad F_1\, x_n^{\varrho} \equiv A_0\, x_1^{m^{n-1}} + A_1\, x_1^{m^{n-1}-1}\, x_n + \dots\dots + A_{m^{n-1}} \cdot x_n^{m^{n-1}} \\
\equiv [f_1\ f_2 \dots f_{n-1}]
$$

Diese Form, welche durch Elimination der $n-2$ Veränderlichen $x_2, x_3 \dots x_{n-1}$ aus $n-1$ allgemeinen Formen $f_1\ f_2 \dots f_{n-1}$ der Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$ sich ergibt, möge kurz als Endform oder im Anschluß an die Bezeichnung in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" als Eliminante bezeichnet werden.

Wie aus (3) sich ergibt, treten nur bei den Gliedern der Identität (4) als Bestandteile ihrer Coefficienten Determinanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in der

m^{n-2}ten Potenz auf, welche von der Form $(x_1^{m-i})^{m^{n-2}} \cdot (x_n^i)^{m^{n-2}}$ sind, wo $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$ zu setzen ist. Insbesondere sind die Determinanten $(n-1)$ter Ordnung, erhoben zur m^{n-2}ten Potenz, deren Elemente allein aus den Coefficienten der reinen Potenzglieder von $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ bezw. $x_2, x_3 \ldots x_n$ in den ursprünglichen Formen bestehen, Bestandteile der Coefficienten des ersten und letzten Gliedes der Endform (4).

Setzt man in dieser Endform $x_1 = 0$, wodurch die Formen $f_1, f_2 \ldots f_{n-1}$ in $g_1, g_2 \ldots g_{n-1}$ übergehen mögen und wo g_i eine allgemeine Form $m$ten Grades der Veränderlichen $x_2, x_3 \ldots x_n$ wird, so bleibt auf der linken Seite der Eliminante (4) nur das letzte Glied $A_{m^{n-1}} \cdot x_n^{m^{n-1}}$ übrig. Nun besitzt aber $A_{m^{n-1}}$ die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen $g_1, g_2 \ldots g_{n-1}$, und ist homogen und vom (m^{n-2})ten Grade hinsichtlich der Coefficienten jeder dieser Formen; ferner besitzt sie auch die Determinante mit den Elementen, welche die Coefficienten der reinen Potenzglieder der Formen g sind, in der (m^{n-2})ten Potenz, versehen mit dem Coefficienten 1. Der Ausdruck $A_{m^{n-1}}$ ist also nach unserem Satze die Resultante der Formen $g_1, g_2 \ldots g_{n-1}$.

Setzt man andererseits in der obigen Endform x_n gleich Null, so geht F_1 über in:

$$A_0 \cdot x_1^{m^{n-1}} = [h_1, h_2 \cdots h_{n-1}],$$

wo $h_1, h_2 \cdots h_{n-1}$ allgemeine Formen vom $m$ten Grade der $n-1$ Veränderlichen $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$ sind, welche durch Nullsetzen von x_n aus den Formen $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$ hervorgehen. Von dem Coefficienten A_0 läßt sich dann

in entsprechender Weise wie oben von $A_{m^{n-1}}$ der Nachweis führen, daß er die Resultante der Formen $h_1, h_2 \cdots h_{n-1}$ darstellt. Aus der Annahme, daß unser Satz für n—1 Formen bewiesen ist, folgt also der Satz:

„Die Coefficienten des ersten und letzten Gliedes der Endform (Eliminante) der allgemeinen Formen $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$ gleichen Grades hinsichtlich der n—2 Veränderlichen $x_2, x_3 \cdots x_{n-1}$ von den n Veränderlichen $x_1, x_2 \cdots x_n$ sind die Resultanten der Formen, welche aus $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$ hervorgehen, wenn man in ihnen x_n bezw. x_1 gleich Null setzt."

Dieser Satz läßt sich übrigens auch für den allgemeinen Fall, daß die Formen von beliebigem Grade $m_1, m_2 \cdots m_{n-1}$ sind, beweisen.

Um nun den Beweis des zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Satzes zu Ende zu führen, muß man sich noch eine zweite Endform in x_1 und x_n vom $(m^{n-1})^{ten}$ Grade verschaffen. Zu diesem Zwecke mögen etwa die n—1 Formen $f_2, f_3 \cdots f_n$ ausgewählt werden und von ihnen die Eliminante in Bezug auf die Veränderlichen $x_2, x_3 \cdots x_{n-1}$ gebildet werden. Die so entstehende Endform werde dargestellt durch:

$$(5)\quad F_2\, x_n \varrho = B_0\, x_1^{m^{n-1}} + B_1\, x_1^{m^{n-1}-1} . x_n + \cdots$$
$$\cdots + B_{m^{n-1}} \cdot x_n^{m^{n-1}} \quad [f_2, f_3 \cdots f_n]$$

Hier sind B_0 und $B_{m^{n-1}}$ wieder die Resultanten der Formen, welche aus $f_2, f_3 \,..\, f_n$ hervorgehen, wenn in ihnen x_n bezw. x_1 gleich Null gesetzt wird, und welche daher auch die entsprechenden Determinanten in der $(m^{n-2})^{ten}$ Potenz als Anfangsglieder erhalten

werden. Diese Determinanten, deren Potenzen als Anfangsglieder in A_0, B_0, $A_{m^{n-1}}$, $B_{m^{n-1}}$ auftreten, kann man als Unterdeterminanten erster Ordnung der Determinante n^{ter} Ordnung $\varDelta$ ansehen, welche die n^2 Coefficienten der reinen Potenzglieder der n Formen $f_1, f_2 \cdots f_n$ zu Elementen hat. Wir bezeichnen diese Unterdeterminanten, indem wir $\varDelta$ die Indices geben, welche das zu der jedesmal in Betracht kommenden Unterdeterminante adjungierte Element der Determinante n^{ter} Ordnung $\varDelta$ besitzt. Demnach ist die Determinante des Anfangsgliedes von A_0 mit $\varDelta_{nn}$, von $A_{m^{n-1}}$ mit $\varDelta_{n1}$, von B_0 mit $\varDelta_{1n}$, von $B_{m^{n-1}}$ mit $\varDelta_{11}$ zu bezeichnen.

Bildet man die Resultante Θ_1 der beiden Formen F_1 und F_2 hinsichtlich der Veränderlichen x_1 und x_n, so enthält diese nach den Auseinandersetzungen über die Resultante zweier binärer Formen zu Anfang dieses Paragraphen das Anfangsglied

$$\left\{A_0\, B_{m^{n-1}} - A_{m^{n-1}} \cdot B_0\right\}^{m^{n-1}} = \Big[(\varDelta_{nn}^{m^{n-2}} + \mathcal{A}_0)(\varDelta_{11}{}^{m^{n-2}} + \mathcal{B}_{m^{n-1}}) - (\varDelta_{n\,1}^{m^{n-2}} + \mathcal{A}_{m^{n-1}})\,(\varDelta_{1\,n}^{m^{n,2}} + \mathcal{B}_0)\Big]^{m^{n-1}}$$

Hier sind $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{A}_{m^{n-1}}$, $\mathcal{B}_{m^{n-1}}$ die anderen Bestandteile, welche in den entsprechenden Coefficienten der Formen F_1 und F_2 außer den $\varDelta$ auftreten. Nach obiger Gleichung enthält also Θ_1 das Glied:

$$[(\varDelta_{11} \cdot \varDelta_{nn})^{m^{n-2}} (\varDelta_{1n} \cdot \varDelta_{n1})^{m^{n-2}}]^{m^{n-1}}$$
$$= [(\varDelta_{11} \cdot \varDelta_{nn} - \varDelta_{1n} \cdot \varDelta_{n1}) \cdot ((\varDelta_{11} \cdot \varDelta_{nn})^{m^{n-2}1} + \ldots + (\varDelta_{1n} \cdot \varDelta_{n1})^{m^{n-2}1})]^{m^{n-1}}$$
$$= (\varDelta_{11} \cdot \varDelta_{nn} - \varDelta_{1n} \cdot \varDelta_{n1})^{m^{n-1}} \cdot \{(\varDelta_{11} \cdot \varDelta_{nn})^{m^{n-2}1} + \ldots + (\varDelta_{1n} \cdot \varDelta_{n1})^{m^{n-2}1}\}^{m^{n-1}}$$

Nun ist aber der Ausdruck in der ersten Klammer der letzten Zeile einer Unterdeterminante 2ter Ordnung

der zu der Determinante n^{ter} Ordnung Δ adjungierten Determinante. Daher ergibt sich für diesen Ausdruck:

$$\Delta_{11} \cdot \Delta_{nn} - \Delta_{1n} \cdot \Delta_{n1} = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{1n} \\ \Delta_{n1} & \Delta_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \cdot \frac{\delta^2 \Delta}{\delta a_{11} \, \delta a_{nn}}$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\left(\frac{\delta^2 \Delta}{\delta a_{11} \delta a_{nn}}\right)^{m^{n-1}} \cdot \left\{(\Delta_{11} \cdot \Delta_{nn})^{m^{n-2}-1} + \ldots + (\Delta_{1n} \cdot \Delta_{n1})^{m^{n-2}-1}\right\}^{m^{n-1}} = N$$

so enthält also Θ_1 das Glied $N\Delta^{m^{n-1}} = NA$, wo A dieselbe Bedeutung hat wie in dem zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Satze. Daß dieses Glied sich nicht etwa fortheben kann, folgt daraus, daß sich das Glied $A_0 \, B_{m^{n-1}} - A_{m^{n-1}} \, B_0$ nur einmal in der m^{n-1} Potenz in Θ_1 vorfinden kann, versehen mit dem Coefficienten 1, und daß andererseits auch der Bestandteil desselben $(\Delta_{11} \cdot \Delta_{nn})^{m^{n-2}} - (\Delta_{1n} \cdot \Delta_{n1})^{m^{n-2}}$ nur einmal vorkommen kann, weil ja, worauf ausdrücklich hingewiesen wurde, Δ_{11}, Δ_{nn} etc. in F_1 bezw. F_2 nur je einmal in der $(m^{n-2})^{ten}$ Potenz auftreten. Möglich ist es aber, daß sich in Θ_1 noch weitere Glieder finden, welche A als Factor enthalten. Ziehen wir alle diese Glieder zusammen, so möge das sich ergebende Product mit

$$A \cdot K_1$$

bezeichnet werden.

Man kann sich ebenso einen entsprechenden Ausdruck Θ_2 schaffen, indem man sich zunächst wieder zwei Formen F_3 und F_4 herrichtet dadurch, daß man aus den n Formen $f_1, f_2 \ldots f_n$ auf andere Weise $n-1$ Formen auswählt, etwa zur Bildung von F_3 die

Formen f_1, $f_3 \ldots f_n$ und für F_4 die Formen f_2, $f_3 \ldots f_n$ (also $F_4 = F_2$). Aus den gewählten Formen gewinnt man auf genau dieselbe Weise, nämlich durch Elimination der Veränderlichen x_2, $x_3 \ldots x_{n-2}$ die beiden Endformen $(m^{n-1})^{ten}$ Grades in x_1 und x_n F_3 und F_4, aus denen man dann nur noch x_1 und x_n zu eliminieren braucht, um zu dem Ausdruck Θ_2 zu gelangen. Es ist leicht zu erkennen, daß auch in Θ_2 Glieder, mit dem Factor A versehen, auftreten werden, aber in Summa andere als in Θ_1. Letztes kann man durch einen Vergleich der Gradzahlen, welche die Coefficienten der Form f_n in beiden Ausdrücken haben, nachweisen. Es möge also in Θ_2 das Glied $A \cdot K_2$ auftreten, in dem alle Glieder von Θ_2 mit dem Factor A enthalten seien.

Die beiden Funktionen Θ_1 und Θ_2 der Coefficienten der Formen f_1, $f_2 \ldots f_n$ besitzen die Grundeigenschaft in Bezug auf diese Formen, denn es folgt z. B. für

$$\Theta_1 = \left[F_1, F_2\right] = \left[[f_1, f_2, \ldots f_{n-1}], [f_2, f_3, \ldots f_n]\right]$$
$$= \left[f_1, f_2 \ldots f_n\right]$$

Das gleiche gilt auch für Θ_2. Diese Funktionen müssen also die Resultante der Formen f_1, f_2, $\ldots$ f_n als Factor besitzen, so daß gesetzt werden kann:

$$\Theta_1 = H_1 \cdot R = K_1 \cdot A + \ldots$$
$$\Theta_2 = H_2 \cdot R = K_2 \cdot A + \ldots$$

Nun können K_1 und K_2 keinen Teiler gemein haben, wie sich aus Vergleichung des ersten und letzten Gliedes von N, einem Bestandteile von K_1 mit den entsprechenden Gliedern von K_2 zeigen läßt. Hierbei wird allerdings angenommen, daß nicht alle Coefficienten der reinen Potenzglieder irgend zweier der n Formen

übereinstimmen, was man aber auch stets durch geeignete lineare Transformationen verhindern könnte. Aus der Teilerfremdheit von K_1 und K_2 folgt, daß sie Teiler von H_1 bezw. H_2 sein müssen und ferner, daß sie die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2 \dots f_n$ nicht besitzen können, weil sie sonst entweder verschwinden müßten, was nicht der Fall ist, oder aber einen gemeinsamen Teiler, nämlich die Resultante der n Formen besitzen müßten. Nunmehr kann nur noch, da ja $A = \Delta^{m^{n-1}}$ ist:

$$H_1 = K_1 \cdot \Delta^i \text{ und } H_2 = K_2 \cdot \Delta^i$$

sein. Auch diese Factoren können, solange $i < m^{n-1}$ ist, nach den Folgerungen des Satzes (1) und nach Satz (2) in § 1 die Grundeigenschaft in Bezug auf $f_1, f_2 \dots f_n$ nicht besitzen. Da nun der Fall $i = m^{n-1}$ nicht in Betracht kommt, weil sonst $R = 1$ wäre für jedes n, was z. B. für $n = 2$ nicht der Fall ist, so kann nur R die Grundeigenschaft besitzen, woraus sich aber wiederum ergibt, daß nur

$$K_1 = H_1 \text{ und } K_2 = H_2$$

sein kann. Dann aber besitzt R das Anfangsglied A mit dem Coefficienten 1.

Schließlich muß R auch homogen in den Coefficienten der n Formen $f_1, f_2 \dots f_n$ sein, da es die Glieder von Θ_1 sind. Hieraus folgt dann, da A in den Coefficienten einer jeden Form f_i homogen und vom Grade m^{n-1} ist, daß auch $K_1 = H_1$ homogen in den Coefficienten einer jeden Form sein muß, also auch R und zwar vom (m^{n-1})ten Grade in den Coefficienten einer jeden Form. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

§ 3.

Aus dem Umstande, daß nach Satz (6) in § 1 sich die Resultante der n Formen $f_1, f_2 \dots f_n$ der Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$ nicht ändert, wenn man die Form f_i durch $f_i + [f_\alpha, f_\beta \dots f_\varepsilon]$ ersetzt, wo $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ die von i verschiedenen Zahlen 1, 2, ... ,n sind und wo $m_i \geqq m_\alpha, m_\beta \dots m_\varepsilon$ vorausgesetzt ist, ergibt sich, daß im Falle gleichen Grades bei den n Formen man zu jeder Form die mit beliebigen Constanten multiplizierten n—1 übrigen Formen addieren kann, ohne den Wert der Resultante zu ändern. Diese Eigenschaft der Resultante von n Formen gleichen Grades erweckt die Vermutung, daß die Resultante aus einer Summe von Producten der Determinanten n^{ter} Ordnung, welche sich der Matrix der n Formen entnehmen lassen, zusammengesetzt ist. Denn in diesem Falle würde jene Änderung der Formen den Wert der einzelnen in der Resultante auftretenden Determinanten nicht ändern, da ja nur zu den Elementen irgend einer Reihe einer beliebigen Determinante die mit irgend welchen Constanten multiplizierten Elemente anderer Reihen derselben Determinante addiert werden. Diese Vermutung wird noch dadurch bestärkt, daß sie sich für den Fall $n = 2$ als richtig erweist und daß außerdem für jedes n das Anfangsglied der Resultante die Potenz einer n-reihigen Determinante ist. Daher liegt es nahe, zu versuchen, folgenden Satz zu beweisen:

»Die Resultante von n allgemeinen Formen $f_1, f_2 \dots f_n$ der Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$, welche alle von gleichem Grade m sind, setzt sich aus einer Summe von Producten $(m^{n-1})^{ten}$ Grades der Determinanten

n^ter^ Ordnung zusammen, welche sich aus der n-reihigen Matrix der n vorliegenden Formen entnehmen lassen.

Hierzu wird die Beweismethode, welche F. Mertens für den in § 1 unter 8.) citierten Satz angewandt hat, benutzt. Man denke sich die Glieder der Formen etwa nach fallenden Potenzen und nach steigenden Indexziffern der x geordnet, dann sollen die Coefficienten mit a_{ik} bezeichnet werden, wo i von 1 bis n, k von 1 bis r läuft, wenn r die Gliederanzahl jener Formen m^ten^ Grades bezeichnet. Wir haben dann das System:

$$f_1 = a_{11}\, x_1{}^m + a_{12}\, x_2{}^m + \ldots\ldots + a_{1r} \cdot x_1{}^p \cdot x_2{}^q \cdots x_n^s$$
$$f_2 = a_{21}\, x_1{}^m + a_{22}\, x_2{}^m + \ldots\ldots + a_{2r}\, x_1{}^p \cdot x_2{}^q \cdots x_n^s$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$f_n = a_{n1}\, x_1{}^m + a_{n2}\, x_2{}^m + \ldots\ldots + a_{nr}\, x_1{}^p \cdot x_2{}^q \cdots x_n^s$$

Es ist also zu zeigen, daß die Resultante

$$R = \begin{bmatrix} f_1, & f_2 & \ldots & f_n \\ x_1, & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$$

eine Funktion von Determinanten n^ter^ Ordnung ist, welche sich aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nr} \end{vmatrix}$$

bilden lassen.

Es seien $y_{11}, y_{12} \ldots y_{nn}$ Unbestimmte und man setze

$$y_{1i} \cdot a_{1k} + y_{2i} \cdot a_{2k} + \ldots\ldots + y_{ni} \cdot a_{nk} = a'_{ik}$$

$$f'_i = a'_{i1}\, x_1^m + a'_{i2} \,.\, x_2^m + \ldots\ldots + a'_{ir} \cdot x_1^p \,.\, x_2^q \ldots x_n^s$$

$$= y_{1i}\, f_1 + y_{2i}\, f_2 + \ldots + y_{ni}\, f_n$$

$$\Sigma \pm y_{11} \cdot y_{22} \cdots y_{nn} = Y$$

Geht R nach Ersetzen von $a_{11}, a_{12} \dots$ durch $a'_{11}, a'_{12} \dots$ in R' über, so hat man:

$$R' = \begin{bmatrix} f'_1, f'_2 \dots, f'_n \\ x_1, x_2 \dots, x_n \end{bmatrix} = Y^{mn-1} \cdot R.$$

Dies ergibt sich folgendermaßen. Wegen

$$R' = [f'_1, f'_2 \dots f'_n]$$

$$= [y_{11} f_1 + y_{21} f_2 + \dots + y_{n1} f_n, \dots, y_{nn} f_1 + y_{2n} f_2 + \dots + y_{nn} f_n]$$

$$= [f_1, f_2, \dots, f_n]$$

muß R' durch R teilbar sein, also etwa

$$R' = Q \cdot R,$$

wo Q die Coefficienten der Formen $f_1, f_2 \dots f_n$ nicht mehr enthält. Dieser Factor Q kann nun mittelst der besonderen Formen f, in denen nur noch die reinen Potenzglieder $x_1^m, x_2^m, \dots x_n^m$ mit den betreffenden Coefficienten vorkommen, bestimmt werden. Denn für sie reduciert sich R auf das Anfangsglied, dessen n reihige Determinante mit Δ bezeichnet werde. Da nun R' aus R hervorgeht, indem die a durch die a' ersetzt werden, so folgt wegen der Bildungsweise der Größen a', daß dann Δ in $\Delta \cdot Y$ übergeht. Daher muß Q $= Y^{mn-1}$ sein.

Es sei nun

$$\Delta_{\alpha\beta\dots\varepsilon} = \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & \dots & a_{n\varepsilon} \end{vmatrix}$$

und man bezeichne die ähnlich wie Determinanten gebildeten Operationen

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta}{\delta y_{11}}, & \frac{\delta}{\delta y_{12}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta y_{1n}} \\ \frac{\delta}{\delta y_{21}}, & \frac{\delta}{\delta y_{22}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta y_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta}{\delta y_{n1}}, & \frac{\delta}{\delta y_{n2}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta y_{nn}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta}{\delta a'_{1\alpha}}, & \frac{\delta}{\delta a'_{1\beta}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta a'_{1\varepsilon}} \\ \frac{\delta}{\delta a'_{2\alpha}}, & \frac{\delta}{\delta a'_{2\beta}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta a'_{2\varepsilon}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\delta}{\delta a'_{n\alpha}}, & \frac{\delta}{\delta a'_{n\beta}} & \cdots & \frac{\delta}{\delta a'_{n\varepsilon}} \end{vmatrix}$$

mit $\bigtriangledown$ und $\Omega_{\alpha, \beta, \ldots \varepsilon}$ und die Operation

$$\sum \Delta_{\alpha, \beta, \ldots \varepsilon} \cdot \Omega_{\alpha, \beta, \ldots \varepsilon}$$

mit Ω, wo das Summenzeichen auf alle Kombinationen n^{ter} Klasse $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ der Zahlen $1, 2, \ldots r$ zu beziehen ist. Nimmt man nun ein Operationsobjekt, welches die Unbestimmten $y_{11}, y_{12} \ldots y_{nn}$ nur innerhalb der Verbindungen $a'_{11}, a'_{12}, \ldots a'_{nn}$ enthält, so ist

$$\bigtriangledown = \Omega$$

und daher

$$\bigtriangledown^q Y^q \cdot R = R \bigtriangledown^q Y^q = \Omega^q \cdot R'$$

Wird Y^q nach Potenzproducten $P, P_1 \ldots$ der Unbestimmten $y_{11}, y_{12} \ldots$, entwickelt und

$$Y^q = c. \quad P + c_1 \cdot P_1 + \ldots$$

gesetzt, und bezeichnet Q, Q_1 ... die Differentiationsforderungen, welche aus P_1 P_1 ... nach Ersetzen von $y_{\varrho\sigma}$ durch $\frac{\delta}{\delta y_{\varrho\sigma}}$ hervorgehen, so ist demzufolge

$$\nabla^q Y^q = c^2 Q P + c_1^2 Q_1 P_1 + \dots = h,$$

wo h eine positive Zahl bezeichnet. Man hat daher

$$R = \frac{1}{h} \Omega^q R',$$

und es erhellt, daß $\frac{1}{h} \Omega^q R'$ die Coefficienten a_{11}, a_{12} .. nur innerhalb der Determinanten $\Delta_{\alpha, \beta, \dots \varepsilon}$ enthalten kann, da hier $q = m^{n-1}$ d. h. gleich dem Grade ist, in dem die Resultante homogen in den Coefficienten der einzelnen Formen ist. Ferner schließt man hieraus, daß die einzelnen Determinantenproducte in R nur noch Zahlencoefficienten haben können. Demnach läßt sich der Satz zu Anfang von § 2 jetzt so aussprechen:

„Die Resultante von n allgemeinen Formen f_1, f_2 ... f_n, welche in den Veränderlichen x_1, x_2 ... x_n alle vom gleichen, aber beliebigen Grade m sind, ist eine solche ganze Funktion der Coefficienten dieser Formen, welche die Grundeigenschaft besitzt, sich als eine Summe von Producten aus Determinanten n^{ter} Ordnung, die der n-reihigen Matrix der Formen entnommen werden können, darstellt, in diesen Determinanten homogen und vom $(m^{n-1})^{ten}$ Grade ist und das Anfangsglied

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^{m^{n-1}}$$

enthält, wenn a_{ik} den Coefficienten von x_k^m in f_i bezeichnet."

§ 4.

Der soeben ausgesprochene Satz könnte die Meinung wachrufen, daß sich die Resultante auch für Formen mit mehr als zwei Veränderlichen als eine Determinante darstellen lassen wird, welche ähnlich der Bézout'schen Resultantendeterminante des binären Gebietes beschaffen ist, welche also als Elemente ausschließlich Formendeterminanten, d. h. Determinanten enthält, welche sich der Matrix der gegebenen Formen entnehmen lassen. Man kann jedoch an dem Beispiel der Resultante dreier ternärer quadratischer Formen oder dreier Kegelschnitte — diese letzte Bezeichnung soll im folgenden durchweg gewählt werden — nachweisen, daß dies allgemein nicht mehr der Fall ist. Daß dagegen die Möglichkeit einer solchen Darstellung für gewisse spezielle Formen auch weiterhin vorhanden ist, zeigt uns ein Beispiel in der Abhandlung von *L. Dixon:* „Die Elimination bei drei Gleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen", auf die noch in § 6 näher eingegangen werden soll.

Zum Nachweise, daß sich die Resultante dreier Kegelschnitte nicht in der oben erwähnten Weise darstellen läßt, führen die folgende Überlegungen.

Wäre eine solche Darstellung möglich, so müßte die Resultantendeterminante von der vierten Ordnung sein. Da diese Determinante die Grundeigenschaft in Bezug der drei Kegelschnittsformen besitzen muß und ihre Elemente dreireihige Determinanten aus der Matrix jener sein sollen, so müßte man vier aus den gegebenen drei allgemeinen Kegelschnittsformen gewonnene Gleichungen aufstellen können, welche nur

noch vier zu eliminierende Größen besitzen d. h. allgemein von der Form sind:

$$(1)\ A_i \cdot \lambda + B_i \cdot \mu + C_i \cdot \nu + D_i \cdot \varrho = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

wo λ, μ, ν, ϱ irgend welche, aber bei den vier Gleichungen natürlich gleichbleibende Komplexe der Variabeln und die A, B, C, D Aggregate von Formendeterminanten der drei Kegelschnitte sind.

Es mögen die drei Kegelschnitte wie in § 1 bei dem Beispiele zu Satz (2) vorliegen und auch sonst dieselben Bezeichnungen wie dort gewählt werden. Damals zeigte es sich, daß man durch Elimination irgend zweier Glieder, d. h. durch Multiplikation der Kegelschnittsgleichungen mit gewissen Konstanten (Coefficienten der ursprünglichen Gleichungen) zu Gleichungen von der gewünschten Form (1) gelangt. Von allen auf diese Weise gebildeten Gleichungen kommen aber nur drei überhaupt in Betracht, nämlich $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ (vgl. § 1 Satz 2, Beispiel). Denn nach dem am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Satze wird es erforderlich sein, daß jede der vier zur Bildung der Resultantendeterminante hergeleiteten Gleichungen (1) die dreireihige Determinante d_{012} in einem und zwar nur in einem ihrer Coefficienten enthält und zwar eine jede bei einem anderen Gliede. Für die Resultantendeterminante kann aber nur eine aus diesen drei Gleichungen ausgewählt werden, weil dieselben in den Veränderlichen weder übereinstimmen noch durch Multiplikation mit irgend welchen Polynomen der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 zur Übereinstimmung gebracht werden können.

Nachdem hierdurch gezeigt ist, daß man durch Multiplikation der Kegelschnittsgleichungen mit Konstanten nur zu einer brauchbaren Gleichung (1) gelangt, wird man naturgemäß dazu übergehen, die gegebenen Gleichungen mit linearen Ausdrücken der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 zu multiplizieren. Nach den bereits erwähnten Eigenschaften, welche die gesuchten Gleichungen besitzen müssen, wird man zweckmäßig folgendermaßen anzusetzen haben:

$$(2) \quad a_0 x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_2 x_3^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1 x_3 + a_5 x_2 x_3,$$
$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3, \delta_1$$

Dieses Schema soll die Abkürzung einer dreireihigen Determinante vorstellen, deren erste Zeile nur hingeschrieben ist; die beiden anderen Zeilen sind entsprechend zu bilden. Die α, β, γ, δ bedeuten hier Konstante, welche aus den Coefficienten der Kegelschnittsgleichungen zu wählen sein werden. Von diesen in den α, β, γ, δ vorliegenden vier Reihen von Kegelschnittscoefficienten müssen zwei, nämlich die δ Reihe und eine der drei übrigen so bestimmt werden, daß ein Glied der entstehenden Gleichung in seinem Coefficienten die dreireihige Determinante d_{012} enthält. So hat man also nur noch zwei Reihen zur Verfügung. Wählt man nun ganz beliebig, so ergeben sich gewöhnlich Gleichungen dritten Grades, welche, wie man ja auch ohne weiteres einsieht, nichts anderes sind als lineare Kombinationen von jenen Gleichungen, die aus den ursprünglichen durch Multiplikation mit Konstanten (Kegelschnittscoefficienten) hervorgehen. Nur wenn man eine der beiden verfügbaren

Coefficientenreihen verschwinden läßt und die andere in bestimmter Weise, worauf gleich hingewiesen werden wird, wählt, wenn man also z. B. so ansetzt

$$(2^1) \quad \left| a_0 x_1^2 + a_1 x_2^2 + a_2 x_3^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1 x_3 + a_5 x_2 x_3, \; a_1 x_2 + a_5 x_3, \; a_2 \right| = 0$$

kommt man zu etwas Neuem. Denn die bei Entwicklung von (2^1) sich ergebende Gleichung ist, wie noch gezeigt werden soll, nur vom zweiten Grade und der Coefficient d_{012} steht bei ihr vor einem anderen Gliede als bei $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$. Sie enthalten aber, und dies ist von entscheidender Wichtigkeit, nicht vier, sondern fünf Glieder, von denen sich keines mehr in geeigneter Weise fortschaffen läßt. Um nun zu zeigen wie die Gleichungen (2^1) zu bilden sind, mache man in jener Determinante folgende Zerlegung:

$$\left| x_1 (a_0 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3) + x_2 (a_1 x_2 + a_5 x_3) + a_2 x_3^2, \; a_1 x_2 + a_5 x_3, \; a_2 \right|$$

$$= x_1 \left| a_0 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3, \; a_1 x_2 + a_5 x_3, \; a_2 \right| = 0$$

Man sieht hieraus, daß man zu diesen Determinantenformen gelangt, in dem man die gegebenen Kegelschnittsgleichungen wie in obiger Determinante zerlegt. Dies kann auf sechs verschiedene Arten geschehen und man erhält so die folgenden sechs Gleichungen:

$$(3) \begin{cases} \text{a)} \; d_{034} x_1^2 + d_{015} x_2^2 \ldots\ldots + (d_{035} + d_{014}) x_1 x_2 - d_{023} x_1 x_3 + d_{012} x_2 x_3 = 0 \\ \text{b)} \; d_{014} x_1^2 - d_{135} x_2^2 \ldots\ldots + (d_{015} - d_{134}) x_1 x_2 + d_{012} x_1 x_3 + d_{123} x_2 x_3 = 0 \\ \text{c)} \; \ldots\ldots + d_{123} x_2^2 + d_{245} x_3^2 + d_{012} x_1 x_2 - d_{025} x_1 x_3 + (d_{124} + d_{235}) x_2 x_3 = 0 \\ \text{d)} \; \ldots\ldots - d_{135} x_2^2 + d_{124} x_3^2 + d_{015} x_1 x_2 + d_{012} x_1 x_3 + (d_{123} - d_{145}) x_2 x_3 = 0 \\ \text{e)} \; - d_{023} x_1^2 \ldots\ldots + d_{245} x_3^2 + d_{012} x_1 x_2 - (d_{025} + d_{234}) x_1 x_3 + d_{124} x_2 x_3 = 0 \\ \text{f)} \; + d_{034} x_1^2 \ldots\ldots - d_{025} x_3^2 + d_{014} x_1 x_2 - (d_{023} + d_{045}) x_1 x_3 + d_{012} x_2 x_3 = 0 \end{cases}$$

Bemerkt sei hierzu, daß diese Gleichungen bedeutend einfacher sind als diejenigen, welche durch einmalige partielle Differentiation nach den Variabeln x_1, x_2, x_3 aus der Funktionaldeterminante (vgl. dazu § 5) entstehen und welche gewöhnlich zur Aufstellung der Resultante dreier Kegelschnitte benutzt werden. Die letzt erwähnten Gleichungen, welche sechs Glieder besitzen, lassen sich auch höchstens auf brauchbare Gleichungen mit fünf Gliedern reduzieren, welche sich dann durch weitere Umrechnung auf obige Form bringen lassen.

Hiermit wäre der Fall der Multiplikation mit linearen Ausdrücken erschöpft, und man käme zu dem einer Multiplikation mit quadratischen Ausdrücken. Um nicht zu sehr ins Einzelne zu gehen, möge hier nur angegeben werden, daß man in diesem Falle zu keinem wesentlich neuen Resultate gelangt; man erhält auch hier wieder als wirklich brauchbare Gleichungen solche, welche sich auf die Gleichungen (3) reduzieren lassen. Die Untersuchungen noch weiter zu führen, dürfte wohl als zwecklos zu bezeichnen sein.

Gelingt es somit nicht, die reine Resultante dreier Kegelschnitte als Determinante darzustellen, welche als Elemente nur Formendeterminanten oder Aggregate derselben enthält, so läßt sie sich doch, versehen mit dem einfachen Factor d_{012}, als eine solche Determinante fünfter Ordnung darstellen, und zwar ist dies auf verschiedene Arten möglich. Man muß, um zu diesem Ziele zu gelangen, z. B. von den Gleichungen (3) die beiden a) und b) verwenden, ferner die Gleichungen $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ und als fünfte eine der beiden Gleich-

ungen 3, c) oder 3, e), aus der noch das überzählige Glied zu entfernen sein wird.

Wählt man die Gleichung (3, c), aus der man das Glied $d_{245}\, x_3^2$ vermittelst der Gleichung

$$d_{045}\, x_1^2 + d_{145}\, x_2^2 + d_{245}\, x_3^2 + d_{345}\, x_1\, x_2 = 0$$

eliminieren kann, so daß man also als fünfte Gleichung erhält:

$$-d_{045}\, x_1^2 + (d_{123} - d_{145})\, x_2^2 + (d_{012} - d_{345})\, x_1\, x_2 - d_{025}\, x_1\, x_3 + \\ + (d_{124} + d_{235})\, x_2\, x_3 = 0$$

so ergibt sich:

$$(5) \quad R \cdot d_{012} = \begin{vmatrix} d_{012} & 0 & d_{123} & d_{124} & d_{125} \\ 0 & d_{012} & -d_{023} & -d_{024} & -d_{025} \\ -d_{045} & d_{123} - d_{145}, & d_{012} - d_{345}, & -d_{025}, & d_{124} + d_{235} \\ d_{014} & -d_{135}, & d_{015} - d_{134}, & d_{012}, & d_{123} \\ d_{034} & d_{015} & d_{035} + d_{014}, & -d_{023} & d_{012} \end{vmatrix} = 0$$

Eine durchsichtige Anordnung scheint sich aber bei dieser Determinante nicht erzielen zu lassen. Im übrigen läßt es sich leicht zeigen, daß die Determinante in (5) den Factor d_{012} besitzt. Dazu braucht man sie nur nach Unterdeterminanten der ersten und zweiten Zeile entwickeln und eine bekannte Determinantenidentität anzuwenden.

Es ist mir gelungen, auch noch auf andere, bedeutend kürzere Art, nachzuweisen, daß sich die Determinante dreier Kegelschnitte nicht in der gewünschten Weise als vierreihige Determinante darstellen läßt. Hierzu bediene ich mich eines Resultates, welches ich der Arbeit: „Anwendung des erweiterten Euklidischen Algorithmus auf Resultantenbildung“ von *Fr. W. Meyer* (Math. Ver. 16. 1907), meinem hochverehrten Herrn

Lehrer, entnehme. Auf den Inhalt dieser Arbeit will ich zunächst kurz eingehen.

In derselben wird zunächst dargelegt, wie man den von *Jacobi* erweiterten Euklidischen Algorithmus mit geringen Modifikationen auf ganze rationale Funktionen übertragen kann. Bei Anwendung des so sich ergebenden Verfahrens auf $\varkappa$ ganze Funktionen in einer Variabeln — nur hierfür sind in der genannten Arbeit die Untersuchungen allgemein durchgeführt — ergeben sich $\varkappa - 1$ sogenannte „letzte Reste des Algorithmus,“ welche ganze Funktionen der Coefficienten der $\varkappa$ gegebenen Funktionen allein, also Konstante sind und welche sich als eine lineare, homogene Kombination der $\varkappa$ gegebenen Formen darstellen lassen. Das gleichzeitige Verschwinden dieser $\varkappa - 1$ letzten Reste des Algorithmus gibt die $\varkappa - 1$ notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines von einer Konstanten verschiedenen größten gemeinsamen Teilers der $\varkappa$ vorgelegten Formen, wobei der letzte dann nicht verschwindende Rest jenen größten gemeinsamen Teiler liefert.

Es wird ferner gezeigt, daß sich eine Partialresultante R der $\varkappa$ gegebenen Formen linear und homogen durch die $\varkappa - 1$ letzten Reste des Algorithmus darstellen läßt. Unter einer Partialresultante R der gegebenen Formen wird dabei eine ganze Funktion der Coefficienten jener verstanden, die verschwindet, sobald diese Formen oder auch nur einige ($\geqq 2$) von ihnen eine gemeinsame Wurzel besitzen. Jede solche Partialresultante R ist aus den vorgelegten Formen linear und homogen komponierbar. Ferner geht aus

der Natur des Algorithmus der Formen hervor, daß sich die $\varkappa-1$ letzten Reste durch $\varkappa-1$ andere Konstanten linear zusammensetzen. Durch Einführung dieser neuen Konstanten, welche von bedeutend geringerem Grade sind und als „reduzierte letzte Reste“ bezeichnet werden, vereinfacht sich die Darstellung der Partialresultanten. Für die Gradzahlen dieser letzten Konstanten besteht ein verhältnismäßig einfaches Gesetz.

Dieser allgemeinen Theorie der Partialresultanten von Formen in einer Veränderlichen wird noch die Betrachtung der Partialresultanten von drei quadratischen Formen in einer, zwei und drei Variabeln angeschlossen. Von besonderem Interesse ist hierbei die geometrische Deutung der einzelnen Factoren, in die gewisse jener Partialresultanten zerlegbar sind.

Für die Betrachtungen dieses Paragraphen ist folgendes Resultat von Bedeutung. Verfährt man, um zur Resultante dreier Kegelschnitte R_{abc} zu gelangen, wie es auch bei dem Beweise in § 2 allgemein geschah, indem man die Eliminante R_c der beiden ersten Kegelschnittsgleichungen bezüglich einer Variabeln sowie die Eliminante R_a der beiden letzten hinsichtlich derselben Veränderlichen bildet und dann die Resultante $R\ (R_a, R_c)$ der beiden binären Gleichungen vierten Grades R_a und R_c aufstellt, so ist die eigentliche Resultante der drei Kegelschnitte bekanntlich ein Factor von $R\ (R_a, R_c)$, also etwa

$$R\ (R_a, R\ ) = P \cdot R_{abc}$$

Von dem Factor P wird nun in der soeben be-

sprochenen Arbeit nachgewiesen, daß er in keine weiteren Factoren zerlegbar ist.

Der Ausdruck R (R_a, R_c) läßt sich aber als Resultante zweier binärer Gleichungen vierten Grades als vierreihige Bézout'sche Determinante darstellen, deren Elemente ganze Funktionen 8ten Grades der Coefficienten der drei gegebenen Kegelschnitte allein sind. Nehmen wir nun an, daß sich die Resultante R_{abc} der drei Kegelschnitte auch durch eine vierreihige Determinante darstellen ließe, deren Elemente aus Formendeterminanten der Kegelschnitte bestehen, so würde, da ja R_{abc} ein Teiler von R (R_a R_c) ist, dies wegen des ganzen Baues der beiden Determinanten nur so möglich sein können, daß sich aus jeder Zeile (bezw. Kolonne) der ersten Determinante gewisse Factoren hervorziehen ließen. Dann aber würde der Factor P mindestens aus vier Factoren zusammengesetzt sein, ein Widerspruch mit dem oben angeführten Resultat. Daher muß die gemachte Annahme falsch gewesen sein und die Resultante der drei Kegelschnitte ist nicht als vierreihige Determinante darstellbar.

§ 5.

Während es sich in den vorigen Paragraphen um die Herleitung eines theoretischen Satzes über die Resultante von n allgemeinen Formen gleichen Grades, sowie um eine damit im Zusammenhang stehende Betrachtung handelte, sollen jetzt die Methoden näher behandelt werden, mittelst deren man imstande ist, diese Resultanten auch wirklich aufzustellen. Wie man im Falle $n=2$ zu verfahren hat, ist zu Beginn

des § 2 auseinandergesetzt worden, so daß also nur noch die Fälle in Betracht kommen, in denen $n > 2$ ist. Wenn wir von den älteren Arbeiten absehen, so haben wir hauptsächlich noch zwei Abhandlungen aus neuester Zeit zu erwähnen. Es möge hier gleich betont werden, daß vermöge der Methoden, welche in jenen Arbeiten angewandt werden, nur ein verhältnismäßig sehr beschränkter Teil von Resultanten aufgestellt werden kann, immerhin aber wird man durch sie in die Lage gesetzt, wohl allen praktisch vorkommenden Fällen zu genügen. Es sei noch erwähnt, daß allen diesen Methoden das eine gemein ist, daß sie auf irgend eine Art versuchen, aus den gegebenen Gleichungen andere herzuleiten und zwar in solcher Anzahl, daß für ihr Zusammenbestehen die Determinante aus ihren Coefficienten verschwinden muß, ohne daß diese jedoch identisch zu Null wird.

Zunächst soll hier auf die kurze Abhandlung von *W. Haskell* „Darstellung gewisser Resultanten in Determinantenform" (Math. Ver. 12. [1903]) eingegangen werden. Diese Arbeit ist dadurch bemerkenswert, daß sie in der Hauptsache für zwei Fälle, nämlich für $n = 4, 5$, $m = 2$ eine Methode zur Resultantenbildung angibt, die sich von den anderen wesentlich unterscheidet. *W. Haskell* leitet nämlich in seiner Abhandlung einen Satz über die zweiten Ableitungen der Funktionaldeterminante ab, welcher als eine Erweiterung zu einem bekannten Satze von *Cayley* über die ersten Ableitungen der Funktionaldeterminante angesehen werden kann (vgl. *Salmon-Fiedler:* Higher Algebra). Dieser Satz lautet:

„Verschwinden gleichzeitig n homogene Formen gleichen Grades von n Veränderlichen, so verhalten sich die zweiten Ableitungen der Funktionaldeterminante jener Formen wie eine gewisse lineare Funktion der entsprechenden zweiten Differentialquotienten der ursprünglichen Formen."

Es scheint notwendig, den Beweis hierzu wiederzugeben, da bei der weiteren Ausdehnung der durch diesen Satz begründeten Methode zur Resultantenbildung auf ihn zurückgegriffen werden muß.

Beweis: Die n allgemeinen Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ sollen hier wegen der sonst sich ergebenden Schwierigkeit in der Bezeichnung anstatt mit $f_1, f_2 \ldots f_n$ mit $\varphi, \psi, \chi \ldots \omega$, die ersten partiellen Ableitungen dieser n Formen nach den Veränderlichen durch Anhängung eines entsprechenden Index, also z. B. $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ mit φ_k und die Funktionaldeterminante der Formen mit J bezeichnet werden.

Mithin ist:

$$(1)\quad J = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \end{vmatrix} = \varphi_k \cdot \Phi_{(k)} + \psi_k \cdot \Psi_{(k)} + \cdots + \omega_k \cdot \Omega_{(k)} = \Sigma \varphi_k \cdot \Phi_{(k)}$$

wo $\Phi_{(k)}$ etc. die Unterdeterminanten der nach der k^{ten} Kolonne entwickelten Determinante J sind. Der Index k ist hier eingeschlossen worden, um die später im Beweise auftretenden Ableitungen dieser Größen bequem durch Anhängung von Indices bezeichnen zu können, ohne dadurch Grund zu Verwechslungen zu geben.

Für $h \lessgtr k$ ist nun

(2) $$\Sigma \varphi_h \cdot \Phi_{(k)} = 0,$$

ferner (3) $$n \cdot \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)} = J \cdot x_k$$

Durch Differentiation nach x_k bezw. x_h folgt:

aus (1) (4) $$\frac{\partial J}{\partial x_k} = J_k = \Sigma \varphi_{kk} \cdot \Phi_{(k)} + \Sigma \varphi_k \cdot \Phi_{(k)k},$$

(5) $$\frac{\partial J}{\partial x_h} = J_h = \Sigma \varphi_{hk} \cdot \Phi_{(k)} + \Sigma \varphi_k \cdot \Phi_{(k)h},$$

aus (2) (6) $$0 = \Sigma \varphi_{hh} \cdot \Phi_{(k)} + \Sigma \varphi_h \cdot \Phi_{(k)h},$$

aus (3) (7) $$J + J_k \cdot x_k = n \Sigma \varphi_k \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)k} = n \cdot J + n \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)k},$$

also $$J_k \cdot x_k = (n-1) J + n \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)k}.$$

Durch Differentiation nach x_h folgt aus (3) und (2):

(8) $$J_h \cdot x_k = n \Sigma \varphi_h \cdot \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)h} = n \Sigma \varphi \Phi_{(k)h}.$$

Ferner ergibt sich durch nochmalige Differentiation nach x_k: aus (7)

$$J_{kk} x_k + J_k = (n-1) J_k + n \Sigma \varphi_k \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)kk}$$

woraus man mit Hilfe von (4) erhält:

(9) $$J_{kk} \cdot x_h = (n-2) J_k + n (J_k - \Sigma \varphi_{kk} \Phi_{(k)}) + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)kk} = 2 (n-1) J_k - n \Sigma \varphi_{kk} \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)kk};$$

aus (8) unter Benutzung von (5)

$$J_h + J_{hk} \cdot x_k = n \Sigma \varphi_k \cdot \Phi_{(k)h} + n \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)hk} = n (J_k - \Sigma \varphi_{hk} \cdot \Phi_{(k)}) + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)hk}$$

oder (10) $$J_{hk} \cdot x_k = (n-1) J_h - n \Sigma \varphi_{hk} \cdot \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)hk}.$$

Differentiation von (8) gibt:

nach x_h (11) $$J_{hh} \cdot x_k = n \Sigma \varphi_h \cdot \Phi_{(k)h} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)hh} = - n \Sigma \varphi_{hh} \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)hh},$$

nach x_i (12) $$J_{hi} \cdot x_k = n \Sigma \varphi_i \Phi_{(k)h} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)hi} = - n \Sigma \varphi_{hi} \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)hi}.$$

Ist nun $\varphi = \psi = \ldots = \omega = 0$, so folgt:

aus (3) $J = \Sigma \varphi_k \Phi_{(k)} = 0$

aus (7) und (8) $J_h = \Sigma \varphi_h \Phi_{(k)} + \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)h} = 0$ für jedes h und schließlich aus (9) bis (12)

$$(13) \quad J_{ih} \cdot x_k + n \Sigma \varphi_{ih} \cdot \Phi_{(k)} = 0$$

für jedes Wertepaar i, h der Zahlenreihe 1, 2, . . . n, gleichviel ob $i = h$ oder $i \neq h$ ist.

Dies letzte war zu beweisen.

Die Formel (13) kann auch so geschrieben werden:

$$J_{ih} \cdot x_k + \lambda \cdot \varphi_{ih} + \mu \cdot \psi_{ih} + \ldots + \varrho \cdot \omega_{ih} = 0,$$

wo $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ allgemeine Formen der n Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ und der Coefficienten der n Gleichungen $\varphi, \psi, \ldots \omega$ sind, welche bei allen Werten von i und h gleich bleiben.

Liegen nun vier homogene quadratische Gleichungen in vier Veränderlichen vor, nämlich $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, $\vartheta = 0$, so sind die zweiten Ableitungen ihrer Funktionaldeterminante wieder quadratische Formen in den vier Unbekannten, sie enthalten also im allgemeinen zehn Glieder. Die zweiten Ableitungen der ursprünglichen Gleichungen werden dagegen Konstante, nämlich gleich einem der Coefficienten jener Gleichungen. Läßt man nun i und k alle Werte von 1 bis 4 durchlaufen, so ergeben sich im ganzen 10 Gleichungen von der Form:

$$J_{ik} + \lambda \cdot \varphi_{ik} + \mu \psi_{ik} + \nu \cdot \chi_{ik} + \varrho \vartheta_{ik} = 0.$$

Fügt man diesen noch die vier ursprünglichen Gleichungen

$$\varphi = 0, \ \psi = 0, \ \chi = 0, \ \vartheta = 0$$

hinzu, so hat man die 14 Größen x_{ii}^2, x_{ik}, λ, μ,

r, ϱ aus diesen 14 Gleichungen zu eliminieren. Die Determinante 14ter Ordnung dieser Größen verschwindet nicht identisch, da sie das richtige Anfangsglied besitzt und auch sonst vom richtigen Grade in den Coefficienten ist. Ferner besitzt sie die Grundeigenschaft in Bezug auf die Formen φ, ψ, χ, ϑ, weil eine jede der ersten 10 Gleichungen, wie aus dem Beweise ersichtlich, in der Form $[\varphi, \psi, \chi, \vartheta]$ erscheint, und jede der letzten Gleichungen von der Form $[\varphi]$ etc. ist.

Schließlich ist es auch nicht schwer einzusehen, daß sich diese Determinante als Summe von Producten vierreihiger Determinanten, deren Elemente aus den Coefficienten der ursprünglichen Gleichungen bestehen, darstellen läßt. Denn dazu braucht man die gewonnene Determinante nur nach Unterdeterminanten der vier letzten Zeilen oder Reihen zu entwickeln und bei den dann sich ergebenden Unterdeterminanten einen entsprechenden Prozeß vorzunehmen. Die Determinante stellt also nach unserem Satze die Resultante der vier Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$, $\vartheta = 0$ dar.

Auf diese Weise läßt sich auch noch der Fall von fünf quadratischen Gleichungen in fünf Unbekannten erledigen. Die Resultante wird hier durch eine Determinante 40ter Ordnung dargestellt. Ebenso zeigt *W. Haskell* noch in seiner erwähnten Abhandlung, daß sich mit dieser Methode einige Fälle erledigen, in denen nicht alle Gleichungen von gleichem Grade sind.

Man kann dieses Verfahren noch etwas erweitern, wodurch man imstande ist auch die Resultante für $n = 6$ aufzustellen, falls quadratische Gleichungen vorliegen.

Denn durch nochmalige Differentiation nach x_k folgt: aus (9)

$$J_{kkk} \cdot x_k + J_{kk} - 2(n-1) J_{kk} = n \Sigma \varphi_{kkk} \Phi_{(k)} + n \Sigma \varphi_{kk} \Phi_{(k)k} \\ + n \Sigma \varphi_k \Phi_{(k)kk} + n \Sigma \varphi \Phi_{(k)kkk}$$

Nun gibt nochmalige Differentiation von (4)

$$J_{kk} - \Sigma \varphi_{kkk} \Phi_{(k)} - 2 \Sigma \varphi_{kk} \Phi_{(k)k} = \Sigma \varphi_k \Phi_{(k)kk}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man das Glied $\Sigma \varphi_k \Phi_{(k)kk}$ eliminieren. Da ferner die dritten Ableitungen, weil ja quadratische Formen vorliegen sollen, zu Null werden, so erhalten wir:

$$J_{kkk} x_k - 3(n-1) J_{kk} = 3 n \Sigma \varphi_{kk} \Phi_{(k)k} + n \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)kkk} .$$

Hierin setzen wir noch den Wert von J_{kk} aus der Gleichung (9) ein, so ist:

$$\text{(I)} \quad J_{kkk} \cdot x_k - 6(n-1)^2 \frac{J_k}{x_k} + 3 n \Sigma \varphi_{kk} \left\{ \frac{(n-1) \Phi_{(k)}}{x_k} + \Phi_{(k)k} \right\} \\ = 3 n \Sigma \varphi \cdot \left\{ \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)kk} + \frac{1}{3} \Phi_{(k)kkk} \right\}$$

Setzt man hier noch zur Abkürzung

$$K_\varphi = \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)} + \Phi_{(k)k} ,$$

so folgt in entsprechender Weise aus (10), (11) und (12):

$$\text{(II)} \quad J_{hkk} \cdot x_k - 2(n-1)^2 \frac{J_h}{x_k} + 2 \Sigma \varphi_{hk} \cdot K_\varphi + n \Sigma \varphi_{kk} \Phi_{(k)h} \\ = 2 n \Sigma \varphi \left\{ \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)hk} + \frac{1}{2} \Phi_{(k)hkk} \right\},$$

$$\text{(III)} \quad J_{hhk} x_k + n \Sigma \varphi_{hh} \cdot K_\varphi + 2 n \Sigma \varphi_{hk} \Phi_{(k)h} \\ = n \Sigma \varphi \left\{ \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)hh} + \Phi_{(k)hhk} \right\},$$

$$\text{(IV)} \quad J_{hhh} \cdot x_k + 3 n \Sigma \varphi_{hh} \Phi_{(k)h} = n \Sigma \varphi \cdot \Phi_{(k)hhh} ,$$

$$\text{(V)}\quad J_{ihk}\, x_k + n \Sigma \varphi_{ik} \cdot \Phi_{(k)h} + n \Sigma \varphi_{ih} \cdot K_\varphi + n \Sigma \varphi_{hk} \cdot \Phi_{(k)i} = n \Sigma \varphi \left\{ \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)ih} + \Phi_{(k)ihk} \right\},$$

$$\text{(VI)}\quad J_{ihl} \cdot x_k + n \Sigma \varphi_{ih} \Phi_{(k)l} + n \Sigma \varphi_{hl} \Phi_{(k)i} + n \Sigma \varphi_{il} \Phi_{(k)h} = n \Sigma \varphi \Phi_{(k)ihl}.$$

Analoge Gleichungen erhält man stets beim fortgesetzten Differentieren, wie man durch den Schuß von n—1 auf n zeigen kann, wobei natürlich immer angenommen werden muß, daß die n Formen $\varphi, \psi \ldots \ldots \omega$ vom 2ten Grade in den Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind. So folgt z. B. entsprechend den Gleichungen (VI), wenn h, i l ... q, r, s irgend welche p der Zahlen 1, 2, ... n sind, unter denen k nicht vorkommt

$$\text{(VII)}\quad J_{hil \ldots qrs} \cdot x_k + n . \sum\Sigma \varphi_{hi} \Phi_{(k)l \ldots qrs} = n \Sigma \varphi \Phi_{(k)ihl \ldots rqs}$$

Hier bedeutet das erste Summenzeichen der Doppelsumme, daß alle möglichen Komplexionen zur (p—2)ten Klasse der Indices von $\Phi_{(k)}$ aus den p Indices von J vorzunehmen sind, was eine entsprechende Änderung der Indices von φ zur Folge hat. Die Gleichung gilt auch entsprechend, falls nicht alle Indices von J von einander verschieden sind. Ferner erhält man analog zu (V) und (III)

$$\text{(VIII)}\quad J_{hil \ldots qrk} \cdot x_k + n \sum\Sigma \varphi_{ih} \left\{ \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)l \ldots qr} + \Phi_{(k)l \ldots qrk} \right\} + n \sum\Sigma \varphi_{ik} \Phi_{(k)hl \ldots qr} = n \Sigma \varphi \left\{ \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)hil \ldots qr} + \Phi_{(k)hil \ldots qrk} \right\},$$

$$\text{(IX)}\quad J_{hil \ldots qkk} \cdot x_k + 2n \sum\Sigma \varphi_{ih} \left\{ \left(\frac{n-1}{x_k}\right)^2 \Phi_{(k)l \ldots q} + \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)l \ldots qk} + \frac{1}{2} \Phi_{(k)l \ldots qkk} \right\}$$
$$+ 2n \sum\Sigma \varphi_{ik} \left\{ \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)hl \ldots q} + \Phi_{(k)hl \ldots qk} \right\} + n \Sigma \varphi_{kk} \Phi_{(k)ihl \ldots q}$$
$$= \Sigma \varphi \left\{ \left(\frac{n-1}{x_k}\right)^2 \cdot \Phi_{(k)ihl \ldots q} + \frac{n-1}{x_k} \Phi_{(k)ihl \ldots qk} + \frac{1}{2} \Phi_{(k)ihl \ldots qkk} \right\}$$

etc.

Hier haben die Doppelsummen entsprechende Bedeutung wie vorher.

Verschwinden nun die n quadratischen Formen $\varphi, \psi \dots \omega$, so erhält man auf diese Weise eine Anzahl von Gleichungen, welche außer den Gliedern, die die Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ in einem bestimmten, von der Anzahl der vorgenommenen Differentiationen abhängigen Grade enthalten, noch mit weiteren Gliedern behaftet sind. Die letzten sind lineare Verbindungen von Coefficienten der ursprünglichen Gleichungen und gewisser Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$ und ebenfalls jener Coefficienten.

Will man untersuchen, ob man mit Hilfe dieser Gleichungen und etwa noch der ursprünglichen imstande ist, die Resultante der n quadratischen Gleichungen $\varphi = 0, \psi = 0 \dots \omega = 0$ in den n Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$ zu bilden, so hat man nach dem Satze in § 3 vor allem darauf zu achten, daß man einen Ausdruck von genügend hohem Grade in den Coefficienten einer jeden Gleichung, also hier vom Grade 2^{n-1}, erlangt und daß dieser Grad auch die Determinante des Anfangsgliedes besitzt. Die Determinante des Anfangsgliedes kann in der Funktionaldeterminante, wenn man sie sich entwickelt denkt, nur bei dem Gliede mit $x_1 \cdot x_2 \dots x_n$ vorkommen. Daher wird sie sich auch nur bei den durch Differentiation aus der Funktionaldeterminante gewonnenen Gleichungen vorfinden, bei denen die Differentiationsindices von J alle verschieden sind (vgl. [VII]). Solcher Gleichungen gibt es im ganzen $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, wo p die Anzahl der vorgenommenen Differentiationen bezeichnet. In diesen

Gleichungen treten, wie aus (VII) und (VIII) leicht ersichtlich, noch außer den mit den Variabeln direkt behafteten Gliedern $\binom{n}{p-2} \cdot n$ andere Glieder auf. Da nun die Funktionaldeterminante von n quadratischen Gleichungen in n Unbekannten vom n^{ten} Grade ist, so werden die durch Differentiation aus ihr abgeleiteten Gleichungen vom $(n-p)^{ten}$ Grade sein, wenn p Differentiationen vorgenommen sind.

Diese Gleichungen enthalten somit im ganzen $\binom{2n-(p+1)}{n-p} + \binom{n}{p-2} \cdot n$ Glieder, zu deren Elimination außer den bereits erwähnten $\binom{n}{n-p}$ Gleichungen, in denen die Determinante des Anfangsgliedes vorkommt, die mit gewissen Potenzen und Potenzproducten multiplizierten ursprünglichen Gleichungen zur Verfügung stehen. Außer diesen Gleichungen kämen dann noch die aus der Funktionaldeterminante abgeleiteten in Betracht, bei denen nicht sämtliche Differentiationsindices von J verschieden sind, bei denen aber im allgemeinen wieder neue zu eliminierende Größen auftreten werden. Hierzu tritt dann noch die Bedingung hinzu, daß, falls es gelingt, zur Elimination aller dieser Größen hinreichend viele Gleichungen aufzustellen, die Determinante der Coefficienten dieser Gleichungen nur vom $(2^{n-1})^{ten}$ Grade in den Coefficienten jeder der ursprünglichen Gleichungen sein darf, soll sie die reine Resultante der n Gleichungen sein.

Ist nun $n = 6$, so folgt aus diesen Betrachtungen, daß, falls $p = 3$ an genommen wird, also die Gleichungen (I) bis (VI) zur Verwendung kommen, die abgeleiteten Gleichungen vom 3ten Grade in den 6 Veränderlichen sind. In diesem Falle hat man dann

$\binom{6}{3} = 20$ Gleichungen, welche die Determinante des Anfangsgliedes der betreffenden Resultante als Coefficient bei irgend einem der Terme $x_i \cdot x_k \cdot x_l$ besitzen. In diesen 20 von einander verschiedenen Gleichungen treten im ganzen $\binom{8}{3} + \binom{6}{1} \cdot 6 = 92$ zu eliminierende Glieder auf. Nun stehen außer jenen 20 Gleichungen erstens 36 weitere Gleichungen zur Verfügung, welche aus den 6 gegebenen dadurch hervorgehen, daß jede von ihnen mit jeder der 6 Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_6$ multipliziert wird, zweitens nochmals 36 Gleichungen, nämlich noch alle die, welche aus der Funktionaldeterminante unserer Gleichungen hergeleitet werden können und bei denen nicht alle Differentiationsindices verschieden sind. Es treten bei diesen zuletzt aufgezählten Gleichungen, wie aus den Formeln (I) bis (VI) hervorgeht, keine weiteren, zu eliminierenden Glieder mehr auf, weil ja die ersten Ableitungen von J verschwinden. Daher haben wir gerade soviele Gleichungen wie zu eliminierende Glieder. Die Determinante erhält aber auch das richtige Anfangsglied, das der Resultante unserer 6 Gleichungen zukommt. Denn sowohl in den ersten wie in den zweiten 36 Gleichungen steckt die Determinante jenes Anfangsgliedes in der 6ten Potenz, so daß man also bei richtiger Entwicklung der Determinante 92ter Ordnung die Determinante des Anfangsgliedes in der 32ten Potenz erhalten würde. Auch sonst kann man leicht nachweisen, daß die so erhaltene Determinante 92ter Ordnung alle Forderungen des Satzes in § 3 erfüllt, also die Resultante der 6 quadratischen Gleichungen ist.

Im Falle $n = 7$ zeigt es sich aber, daß diese Methode, die Resultante zu bilden, bereits versagt. Denn, falls man hier $p = 4$ annimmt, wodurch man wieder auf Formen dritten Grades geführt wird, treten bei den aus der Funktionaldeterminante abgeleiteten Gleichungen, bei denen nicht alle Indices verschieden sind, noch neu zu eliminierende Glieder auf. Will man aber alle diese Glieder eliminieren, so wird die Anzahl der Gleichungen oder vielmehr der Grad der sich hierbei ergebenden Determinante in den Coefficienten der ursprünglichen Gleichungen größer, als es sich mit dem Grade der Resultante in jenen Coefficienten vereinen ließe. Aber auch wenn p anders gewählt wird, gelingt es nicht, die Resultante rein d. h. ohne mit einem Factor behaftet, zu erhalten.

Diese Methode anderswie anzubauen, ist mir bisher nicht gelungen.

§ 6.

Mr. *A. L. Dixon* hat in seiner „Die Elimination von drei Gleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen“ betitelten Arbeit eine Methode angegeben, vermöge deren man imstande ist, die Resultante von drei vorliegenden Gleichungen, seien sie nun gleichen Grades oder nicht, aufzustellen und zwar in Determinantenform. Auch er bedient sich dazu zweier Arten von Gleichungen, die aus den gegebenen gewonnen werden. Die einen enthalten als Coefficienten Aggregate von Determinanten dritter Ordnung, deren Elemente die Coefficienten der ursprünglichen Gleichungen bilden, die anderen sind die gegebenen Gleichungen selbst multipliziert mit gewissen Potenzen

oder Potenzproducten der Veränderlichen. *Dixon* wendet bei seinen Untersuchungen über die Resultante der drei Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ in x, y, die er also in nicht homogene Form geschrieben annimmt, folgende Funktion zur Bildung der Gleichungen der ersten Art an:

$$F(x, y, a, b) = \begin{vmatrix} \varphi(x, y) & \psi(x, y) & \chi(x, y) \\ \lambda \cdot \varphi(x,b) + \mu \cdot \varphi(a,y), & \lambda \psi(x,b) + \mu \psi(a,y), & \lambda \chi(x,b) + \mu \chi(a,y) \\ \varphi(a, b) & \psi(a, b) & \chi(a, b) \end{vmatrix}$$

wo λ und μ zwei willkürliche Constanten bedeuten. Diese Funktion ist der von *Cayley* herrührenden

$$[\varphi(x) \cdot \psi(a) - \varphi(a) \cdot \psi(x)] : (x - a),$$

nachgebildet, vermittelst der die Elimination aus zwei Gleichungen in einer unabhängigen Veränderlichen bewerkstellt werden kann. Wie nun die Cayley'sche Funktion den Teiler $x - a$ aufweist, so zeigt es sich daß auch die Funktion $F(x, y, a, b)$ einen analogen Teiler, nämlich $(x - a) \cdot (y - b)$ besitzt. Sie liefert also eine Gleichung vom Grade $2n - 2$ in x, y und in a, b, wenn n der Grad der gegebenen Gleichungen ist. Da diese Gleichungen für alle Werte a und b bestehen muß, so geben die gleich Null gesetzten Coefficienten von $a^r \cdot b^s$ Gleichungen der ersten Art. Die Berechnung dieser Coefficienten von $a^r \cdot b^s$ wird noch erheblich durch passende Wahl von λ und μ erleichtert. Um nun zu bestimmen, wie viele Gleichungen der einen, wie viele der andern Art man zu verwenden hat, um die reine Resultante zu bilden, hat

man folgendermaßen zu verfahren. Man bezeichne die Anzahl der nötigen Gleichungen der ersten Art mit ξ, die der zweiten mit 3η. Die Resultante der drei gegebenen Gleichungen vom n^{ten} Grade muß in den Coefficienten dieser Gleichungen homogen und in denen jeder einzelnen vom $(n^2)^{ten}$ Grade sein, da ferner $2n^2-n$ Glieder zu eliminieren sind, so folgt, daß die Gleichungen bestehen müssen:

$$\xi + \eta = n^2 \qquad \xi + 3\eta = 2n^2 - n$$

woraus sich ergibt:

$$\xi = \frac{1}{2} n (n+1) \qquad \eta = \frac{1}{2} n (n-1)$$

Man sieht, daß sich auf diese Weise die Resultante dreier Formen gleichen Grades immer als Determinante von der Ordnung $2n^2-n$, wo n der Grad der gegebenen Gleichungen ist, bilden läßt, wofern es glückt, genügend viele von einander verschiedene und linear unabhängige Gleichungen ξ aufzufinden. Die Frage, ob letztes sets möglich ist, wird von *Dixon* nicht weiter untersucht, obwohl noch der Umstand hinzukommt, daß diese Gleichungen nicht nur von einander verschieden und linear unabhängig sein, sondern auch die Determinante des Anfangsgliedes stets enthalten müssen und zwar nur einmal aber immer bei verschiedenen Gliedern. Es wird ferner in dieser Arbeit gezeigt, daß man mit der Funktion F (x, y, a, b) auch die Gleichungen zur Bildung der Resultante dreier Gleichungen gewinnen kann, falls diese von verschiedenem Grade sind, wie auch in dem Falle, daß die Gleichungen nicht allgemeine sind. In dem letzten Falle, wenn also gewisse Glieder fehlen,

läßt sich diese Methode auch auf Formen, deren Anzahl größer als drei ist, mit der dann entsprechenden Zahl von Veränderlichen, ausdehnen. Dies gelingt aber nicht, wenn allgemeine Formen vorliegen. Näher begründet wird dieses in der Dixon'schen Arbeit nicht. Es ist aber nicht schwierig, zu zeigen, daß ein analoges Verfahren bei vier nicht homogenen, allgemeinen Gleichungen in x, y, z nicht mehr allgemein durchführbar ist. Denn angenommen, es ließe sich in entsprechender Weise auch hier eine Funktion F (x, y, z, a, b, c) mit dem Teiler (x—a) (y—b) (z—c) bilden, so würde man bei ihrer Entwicklung zu einer Gleichung kommen, welche in x, y, z und ebenso in a, b, c vom $[3(n-1)]^{\text{ten}}$ Grade wäre, wenn n den Grad der vier vorliegenden Gleichungen bezeichnen soll. Da diese Gleichung für alle Werte von a, b, c bestehen muß, so gelangt man durch Nullsetzen der Coefficienten von $a^r . b^s . c^t$ zu Gleichungen vom $[3(n-1)]^{\text{ten}}$ Grade in x, y, z. Die Gliederanzahl einer solchen Gleichung ist allgemein gleich $\frac{(3n-2)(3n-1)\cdot 3n}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(3n-2)(3n-1)}{1\cdot 2}$.

Wir bezeichnen wieder die Anzahl der Gleichungen, welche, aus der Funktion F (x, y, z, a, b, c) gewonnen, zur Bildung der Resultante verwandt werden müssen, mit ξ und die Anzahl der anderen Gleichungen, die aus den ursprünglichen durch Multiplikation mit Potenzen oder Potenzproducten der Veränderlichen zu bilden sind, mit 4η. Es bestehen dann wegen der Eigenschaft, welche die Resultante besitzt, und wegen der Gliederanzahl der Gleichungen die Beziehungen

$$\xi + \eta = n^3 \qquad \xi + 4\eta = \frac{n(3n-2)(3n-1)}{1\cdot 2}.$$

Für ξ findet man hieraus:

$$\xi = \frac{n}{6} \left\{ - n^2 + 9 n - 2 \right\}$$

Setzt man hierin $n = 9$, so ergibt sich $\xi = -3$, ein Resultat, welches unbrauchbar ist und besagt, daß die Anzahl der in den aus F (x, y, z, a, b, c) hergeleiteten Gleichungen auftretenden Glieder in diesem Falle wie in allen anderen, wo n noch größer ist, die Anzahl der Gleichungen übersteigt, welche zur Bildung der Resultante verwandt werden dürfen.

Zum Schlusse soll hier eine andere Methode angegeben werden, vermöge der man zu den Gleichungen erster Art gelangt, wenn drei Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, in den Veränderlichen x_1, x_2, x_3 homogen und vom beliebigen Grade n, vorliegen. Sie besteht in der allgemeinen Durchführung der Methode, durch welche bereits die Gleichungen (3) in § 4 gewonnen wurden, und war von mir bereits gefunden, ehe ich noch die Dixon'sche Arbeit gelesen hatte. Bei dieser Methode läßt sich vor allem auch zeigen, daß man sich stets eine genügende Anzahl von Gleichungen der ersten Art verschaffen kann, welche die Determinante des Anfangsgliedes stets nur bei einem Gliede und zwar stets vor anderen Gliedern bei verschiedenen zur Verwendung gelangenden Gleichungen haben. Ferner ist bei derselben auch der Nachweis leicht zu erbringen, daß die Resultante, welche man auf diese Weise gewinnt, die Grundeigenschaft in Bezug auf f_1, f_2, f_3 besitzt, kurz allen Anforderungen des Satzes in § 3 genügt.

Es ist folgendermaßen zu verfahren. Man faßt

z. B. alle Glieder, welche x_1 in mindestens der ersten Potenz enthalten, zusammen und zieht den gemeinsamen Factor x_1 hervor; ebenso verfährt man bei den dann noch übrig gebliebenen Gliedern, welche x_2 zum Factor haben. Dann kann man schreiben:

$$f_i = A_{i1}\, x_1 + B_{i1}\, x_2 + a_{i3}\, x_3^n = 0.$$

Hier sind A_{i1} und B_{i1} ganz rationale Funktionen $(n-1)^{ten}$ Grades in den Veränderlichen x_1, x_2, x_3 bezw. x_2, x_3 a_{i3} und der Coifficient, welchen das reine Potenzglied x_3^n in f_i hat. Die für das Zusammenbestehen dreier solcher Gleichungen gleich Null zusetzende Determinante

$$A_{11}\,,\ B_{11}\,,\ a_{13}$$

liefert eine gesuchte Gleichung, die die Determinante des Anfangsgliedes der betreffenden Resultante bei dem Gliede $x_1^{n-1} \cdot x_2^{n-1}$ als Coefficient hat und vom $(2n-2)^{ten}$ Grade ist. Wenn man die Rollen, welche x_1, x_2, x_3 in obiger Gleichung spielen, vertauscht, erhält man noch zwei weitere brauchbare Gleichungen. Weiterhin werden die gegebenen Gleichungen zerlegt wie:

$$f_i = x_1^r \cdot A_{ir} + x_2^s\, B_{is} + C_{i0}\,,$$

wo A_{ir} und B_{is} homogene ganze Funktionen der Veränderlichen sind, deren Grad $n-r$ und $n-s$ ist, doch so, daß die Summe dieser Grade gleich $n-2$ wird. C_{i0} enthält die in den beiden ersten Gliedern der Zerlegung nicht vorkommenden Glieder von f_i, ist also vom n^{ten} Grade in x_1, x_2, x_3. Die gleich Null gesetzte Determinante

$$A_{1r}\,,\ B_{1s}\,,\ C_{10}$$

liefert wieder eine gewünschte Gleichung vom $(2n-2)^{ten}$ Grade, welche die Determinante $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$ bei dem Gliede $x_1^{n-r} \cdot x_2^{n-s} \cdot x_3^n$ besitzt. Hierbei erhält man, wenn noch die nötigen Vertauschungen vorgenommen werden und r von 2 bis n, wobei s von n bis 2 läuft, im ganzen 3 (n—1) verschiedene Gleichungen. Ferner gewinnt man weitere Gleichungen, indem man die Gleichungen zerlegt, wie z. B.

$$f_i = A_{i1}\ x_1 + B_{ir}\ x_2^r + C_{is}\ x_3^s$$

wo A_{i1} = alle Glieder mit x_1 aus f_i enthält, so daß dann nur noch eine allgemeine Form n^{ten} Grades in x_2 und x_3 übrig bleibt, welche weiter wie in § 2 zu zerlegen ist. Hier kann r noch die Werte von 2 bis n—1 annehmen, sollen neue Gleichungen erhalten werden. Im ganzen ergeben sich dann weitere 3 (n—2) Gleichungen. Fährt man in dieser Weise in dem Bilden von Gleichungen fort, so ist es leicht zu übersehen, daß stets genügend viele Gleichungen erhalten werden können. Die Schlüsse über die Anzahl der jemals zu verwendenden Gleichungen der einen und der andern Art bleiben dieselben wie bei der Dixonschen Methode. Daß die sich dann ergebende ganze Funktion der Coefficienten der ursprünglichen Gleichungen f_1, f_2, f_3 auch in Bezug auf diese die Grundeigenschaft besitzt, liegt jetzt klar auf der Hand, weil sich erstens jede Gleichung der ersten Art durch $[f_1\ f_2\ f_3]$ darstellt und zweitens die Gleichungen der zweiten Art von der Form $[f_i]$ sind. Diese Methode läßt sich aus denselben Gründen wie die Dixon'sche nicht verallgemeinern.

Wenn man sich die Ausführungen der beiden letzten Paragraphen vergegenwärtigt, wenn man fernerhin bedenkt, daß trotz manigfacher Versuche, es bis heute nicht gelungen ist, eine einheitliche, gut durchführbare Methode zur Resultantenbildung anzugeben, so wird man unwillkürlich auf den Gedanken kommen müssen, daß der Weg, den man bisher fast allgemein dazu eingeschlagen hat, nicht der richtige sein dürfte. Ich glaube nämlich, daß, wie sich die Resultante von mehr als zwei Formen in ebensovielen Veränderlichen in eine der Bézout'schen Determinante analog gebildeten allgemein nicht darstellen läßt, sich ebensowenig die Resultante allgemein überhaupt in eine Determinante zwängen lassen wird. Ich bin denn auch neuerdings von dem Suchen nach einer allgemeinen Methode, welche mit Gleichungen arbeitet, abgekommen und versuche jetzt das Vorkommen gewisser Gliedergruppen, welche sich mir durch Analogieschlüsse aus der Resultante zweier Formen zu ergeben scheinen, nachzuweisen. Bei diesen Untersuchungen habe ich denn auch bereits bemerkenswerte Resultate, welche beinahe den ganzen Aufbau der Resultante übersehen lassen, zu verzeichnen. Immerhin bedürfen dieselben noch weiterer Durcharbeitung, da sich die Beweise nicht ganz einfach führen lassen. Es möge dieses daher einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

Lebenslauf.

Ich, *Kurt Tiedemann,* bin geboren am 23. Oktober 1886 zu Eydtkuhnen, Kreis Stallupönen, als Sohn des bereits verstorbenen Kaufmanns *Hugo Tiedemann* und seiner ebenfalls verstorbenen Gemahlin *Martha,* geb. *Bundt.*

Ich bin evangelischer Konfession. Meinen ersten Unterricht empfing ich auf der Privatknabenschule zu Eydtkuhnen. Von Ostern 1897 ab besuchte ich das Königliche Friedrichskollegium und nach Absolvierung der Untersekunda seit Ostern 1903 das Kneiphöfische Gymnasium zu Königsberg, wo ich 1906 das Zeugnis der Reife erhielt.

Ich widmete mich dann dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften an der Albertus-Universität zu Königsberg bis Michaelis 1911.

Ich hörte während dieser Zeit Vorlesungen bei folgenden Herren Professoren und Docenten:

Ach, Biberbach, Kaufmann, Klinger, Kowalewski, Meyer, Saalschütz, Schmidt, Schoenfließ, Volkmann.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern, insbesondere meinem Leiter und Führer bei meinen mathematischen Studien, Herrn Geh. Regierungsrat, Prof. Dr. *Fr. Meyer,* spreche ich an dieser Stelle meinen ergebenen Dank aus.

Am 19. Dezember 1911 bestand ich das Examen rigorosum.